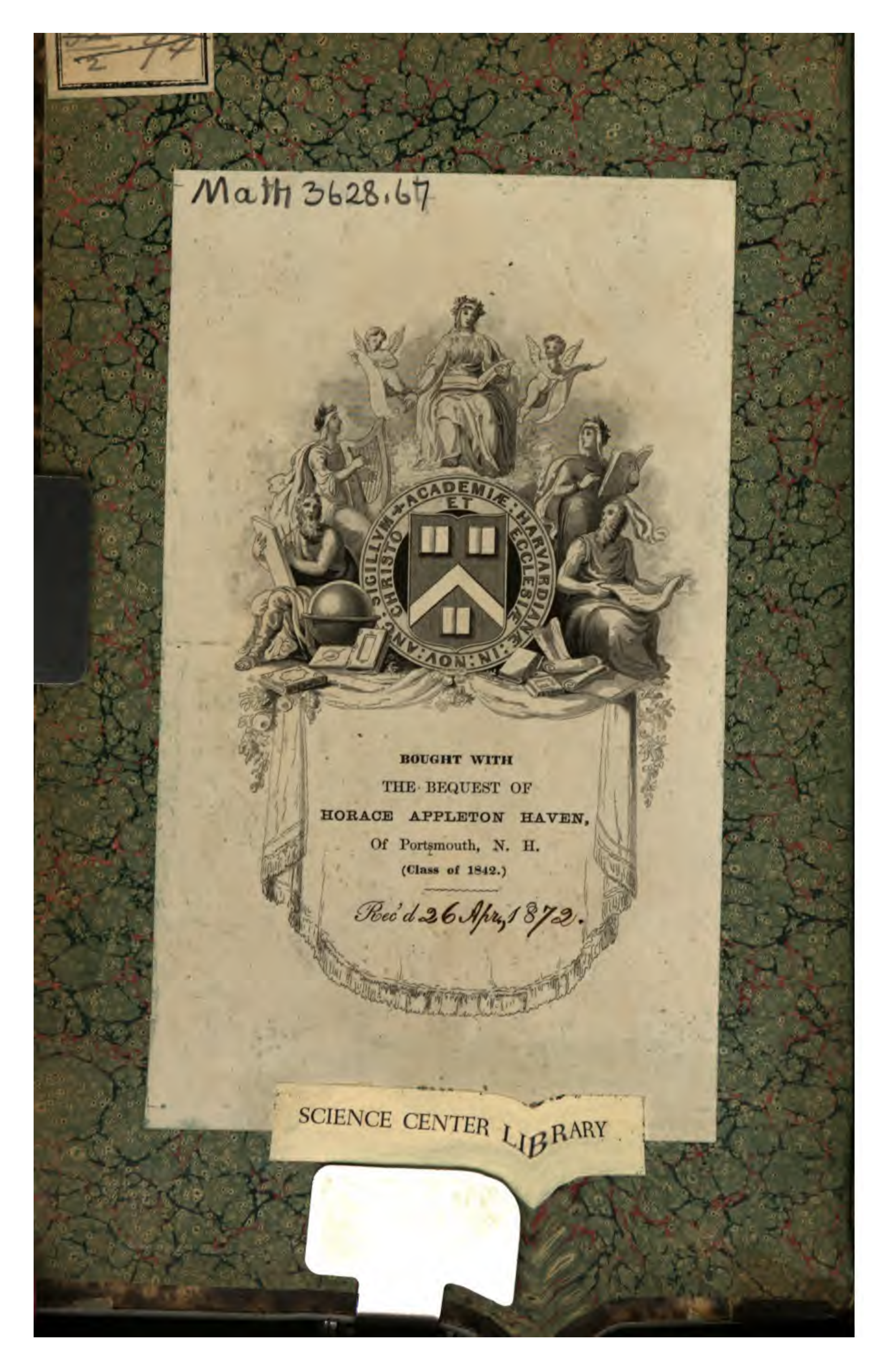

Math 3628.67
SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG: CHRISTO ET ECCLESIÆ
BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)
Rec'd 26 Apr., 1872.
SCIENCE CENTER LIBRARY



THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

SOUS PRESSE :

La SECONDE PARTIE, contenant la Théorie des fonctions uniformes, les principes du Calcul des Résidus, et les applications au calcul des intégrales définies et au développement des fonctions en séries et en produits.

Bordeaux, imp. G. Gounouilhou,
rue Guiraude, 11.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PAR J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences
de Bordeaux.

PREMIÈRE PARTIE.

ALGÈBRE DES QUANTITÉS COMPLEXES.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU
DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1867

1872, Apr. 26.
Haven Fund.
I. - II.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PREMIÈRE PARTIE.

Algèbre des quantités complexes.

CHAPITRE Ier

INTRODUCTION

§ Ier

Considérations générales.

1. Une des plus grandes difficultés qu'éprouvent les commençants, en abordant l'étude de l'algèbre, c'est l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires. Les géomètres qui ont assis sur des bases inébranlables les règles du calcul de ces symboles ont rendu un immense service à la philosophie mathématique. On peut cependant ne pas se trouver encore pleinement satisfait de leurs démonstrations, qui sont d'une rigueur inattaquable, sans doute, mais qui laissent subsister dans les mathématiques des symboles de quantités et des signes d'opérations qui semblent ne correspondre à rien de réel. Les raisonnements généralement employés reviennent à établir qu'il y a compensation entre deux absurdités, savoir : entre la considération de quantités dont l'existence implique contradiction, et entre l'application à ces quantités d'opérations qui n'ont de sens que pour les quantités réelles.

2. On aura donc obtenu un avantage important, si l'on parvient à démontrer les mêmes règles avec la même rigueur, sans intro-

duire dans les raisonnements autre chose que des quantités réelles et mesurables, sur lesquelles on exécutera des opérations nettement définies, mais plus générales que les opérations simples de l'arithmétique. De cette manière, au lieu d'arriver au résultat par une route certaine, mais obscure, dans laquelle un esprit timide peut craindre à chaque instant de s'égarer, on passera par une suite de déductions claires, et l'on pourra suivre des yeux toutes les phases du calcul.

3. On atteint ce but, en introduisant dans l'algèbre de nouveaux signes d'opérations fondés sur des considérations géométriques, qui offrent un champ plus étendu et des ressources plus variées que les considérations arithmétiques que l'on prend généralement pour point de départ.

Toute valeur numérique peut être représentée par le rapport de deux grandeurs géométriques, lignes, angles, aires, volumes, etc., ou simplement par une seule grandeur, si l'unité de son espèce est donnée.

Une figure de géométrie peut être considérée comme la représentation d'autant de nombres qu'elle renferme de grandeurs mesurables. Ainsi, un triangle représente trois nombres par ses trois côtés, trois nombres par ses trois angles, un nombre par son aire, etc.

Toute construction géométrique correspond à diverses combinaisons d'opérations arithmétiques entre les nombres représentés par les divers éléments de la construction. Ainsi, une force étant déterminée, dans un plan donné, par deux éléments, une longueur et un angle, la composition de deux forces, qui revient à la construction d'un parallélogramme ou d'un triangle, correspondra à toutes les opérations arithmétiques nécessaires pour déterminer les éléments de ce parallélogramme ou de ce triangle au moyen des deux longueurs et des deux angles donnés. Cet ensemble d'opérations sera désigné, d'une manière aussi claire qu'abrégée, en l'appelant *construction d'un parallélogramme*.

4. L'algèbre s'occupe uniquement de la combinaison des opérations, sans s'inquiéter de leur signification ni de leur nature. Elle donne les moyens de remplacer une combinaison d'opérations par

une autre combinaison équivalente; mais elle ne traite nullement de la manière d'effectuer ces opérations. Elle part d'un petit nombre de principes tirés des propriétés communes que présente chaque opération dans les divers cas particuliers pour lesquels elle a été définie. Tels sont les principes suivants :

Une somme ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties (principe de l'*addition*).

La *soustraction* est l'opération inverse de l'addition.

Un produit ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de ses facteurs (principe de la *multiplication*).

Etc.

C'est en partant de ces principes que l'on établit les règles pour la transformation des opérations les unes dans les autres.

Rien n'empêche donc de donner des opérations fondamentales relatives à telle ou telle espèce de quantités telles définitions que l'on voudra, pourvu que ces définitions s'accordent avec les principes en question. Les règles du calcul algébrique s'appliqueront toujours aux opérations ainsi définies tant que ces conditions seront remplies.

Par exemple, rien n'empêchera d'appeler *addition* la composition de deux forces, et de dire que la résultante est égale à la *somme* des composantes; car la somme, ainsi définie, jouit de la propriété de ne pas changer lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties.

Naturellement les définitions des opérations ne doivent pas être choisies au hasard. On commence par prendre les définitions les plus simples; puis on les modifie en les généralisant, à mesure que les définitions primitives deviennent insuffisantes. Mais on a soin que chaque nouvelle généralisation renferme toujours les cas particuliers précédents.

5. Tant que l'on s'en tient aux définitions primitives, les règles de calcul ne peuvent embrasser à la fois tous les cas différents d'une même question; et si les calculs ont été établis spécialement pour un de ces cas, ils conduiront, pour les autres cas, à des impossibilités. On cherchera alors à généraliser à la fois l'idée de quantité et les définitions des opérations, de manière que l'impossibilité soit écartée, et qu'une même formule puisse embrasser la solution de tous les cas.

Remarquons, en passant, que l'impossibilité d'un problème n'est pas toujours accusée par la nature même des symboles que le calcul donne pour solution. Elle peut provenir de ce que le résultat ne remplit pas certaines conditions que l'on n'a pas pu exprimer par les équations du problème. Le problème est impossible, par exemple, lorsque sa nature exige que la solution soit un nombre entier, et que le calcul donne un résultat fractionnaire. Tel serait le cas où l'on demanderait combien il faudrait donner de dents à une roue engrenant avec une autre roue armée de 50 dents, pour qu'elle fît 3 fois plus de tours que celle-ci dans le même temps.

Il faut distinguer, en outre, entre l'impossibilité absolue d'un problème, et l'impossibilité de tel ou tel cas de ce problème, lorsqu'il en peut présenter plusieurs. C'est dans ce dernier cas seulement que l'on peut faire disparaître l'impossibilité par la généralisation des opérations.

6. Cette généralisation s'obtient en remplaçant les définitions arithmétiques des quantités et des opérations par des définitions géométriques. C'est ce que l'on a fait, depuis Descartes, pour les quantités négatives. Mais c'est plus tard seulement que l'on a cherché à représenter géométriquement les quantités imaginaires par des grandeurs réelles. Leur théorie purement algébrique n'a guère été fixée que depuis un siècle, après les travaux de d'Alembert et d'Euler, et c'est plus récemment encore que Cauchy y a mis la dernière main.

§ II.

Sur l'histoire de la théorie géométrique des imaginaires.

7. Le premier essai de représentation géométrique des quantités imaginaires est dû au géomètre prussien Heinrich Kühn, né à Kœnigsberg en 1690, mort à Danzig en 1769.

Kühn a publié, en 1750, dans le tome III des *Novi Commentarii* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, dont il était membre, un Mémoire de 54 pages in-4°, intitulé : *Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis*.

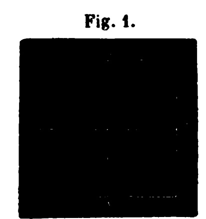
Ce travail, que Montucla traite peut-être avec trop de dédain,

ne contient pas, il est vrai, la solution de la difficulté, que l'auteur avait aperçue; mais il a, du moins, le mérite d'avoir mis sur la voie, et il restait bien peu de chose à ajouter pour obtenir la représentation des imaginaires telle qu'on la conçoit aujourd'hui.

8. Voici sur quelles bases reposent les considérations longuement développées par Kühn.

Étant donnés deux axes rectangulaires, portons, à partir de leur intersection mutuelle, et de part et d'autre de cette intersection, sur l'un d'eux, des longueurs égales à a, et sur l'autre, des longueurs égales à b. En donnant des signes à ces longueurs, d'après la convention établie par Descartes, les segments pris sur le premier axe seront $+a$ et $-a$; les segments pris sur le second axe seront $+b$ et $-b$. Construisons les quatre rectangles qui ont ces segments pour côtés, et donnons aux aires de ces rectangles les signes qui résultent de la multiplication de leurs dimensions en grandeur et en signe. Les aires de ces quatre rectangles seront alors

Fig. 1.



$$\begin{aligned} \alpha &= (+a) \times (+b) = +ab, \\ \beta &= (+a) \times (-b) = -ba, \\ \gamma &= (-a) \times (-b) = +ba, \\ \delta &= (-a) \times (+b) = -ab. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $b = a$, et désignons par le signe $\sqrt{\ }$ le côté de chacun des carrés résultants. On aura, d'après Kühn,

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} &= \sqrt{(+a) \times (+a)} = +a, \\ \sqrt{\beta} &= \sqrt{(+a) \times (-a)} = +\sqrt{-a^2}, \\ \sqrt{\gamma} &= \sqrt{(-a) \times (-a)} = -a, \\ \sqrt{\delta} &= \sqrt{(-a) \times (+a)} = -\sqrt{-a^2}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'il serait plus naturel, selon nos idées actuelles, de poser, comme nous le verrons plus tard,

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta} &= -\sqrt{-a^2}, \\ \sqrt{\delta} &= +\sqrt{-a^2}. \end{aligned}$$

9. L'imaginaire $\pm\sqrt{-a^2}$, qui exprime l'une ou l'autre des racines de l'équation

$$x^2 + a^2 = 0,$$

est définie par Kühn comme le *côté de l'un des carrés négatifs* β ou δ. Mais l'auteur n'indique pas lequel des côtés du carré il faut prendre pour représenter l'imaginaire, et faute d'avoir fait entrer dans cette représentation la notion de direction, il lui devient impossible de définir ce qu'il faut entendre par la *somme* d'une quantité réelle et d'une quantité imaginaire, telle qu'on la rencontre dans la solution de l'équation complète du second degré

$$(x - g)^2 + h^2 = 0.$$

Il dit bien que cette équation est vérifiée en prenant pour $x - g$ le côté d'un carré négatif; mais il n'indique nullement quel sens il faut attacher à la racine elle-même

$$x = g \pm \sqrt{-h^2}.$$

C'est donc à tort, selon nous, que l'on fait souvent remonter à Kühn l'idée de la représentation des imaginaires au moyen d'une direction perpendiculaire à celle qui correspond aux quantités réelles. On voit, au contraire, qu'il considère les longueurs comptées sur l'axe vertical comme des quantités réelles, positives ou négatives, aussi bien que les quantités comptées sur l'axe horizontal. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'il a posé le problème sans le résoudre, et que la lecture de son Mémoire aurait pu mettre ses successeurs sur la voie de la solution.

10. Pendant le demi-siècle qui suivit la publication du travail de Kühn, la question fut à peu près abandonnée. Nous lisons seulement, dans une Note de Cauchy [1], la mention suivante, à propos des travaux dont nous parlerons tout à l'heure :

« Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à » ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent, et dès » l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, » qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a

(1) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 157.

» communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, cons-
» tructeur de vaisseaux au Havre. »

11. Le premier Mémoire publié sur ce sujet, depuis la tentative de Kühn, est celui de l'abbé Buée, inséré dans les *Philosophical Transactions* pour l'année 1806, et intitulé : *Mémoire sur les quantités imaginaires* (56 pages) [1].

Dans ce travail, Buée formule nettement, pour la première fois, la représentation des lignes imaginaires par des longueurs perpendiculaires à la direction des lignes réelles.

Il parvient à ce résultat par deux raisonnements différents.

Fig. 2.

Le premier repose sur la construction d'une moyenne proportionnelle. La perpendiculaire AB, élevée sur le milieu du diamètre d'un demi-cercle de rayon $= 1$, est une moyenne proportionnelle entre les deux moitiés, $AC = +1$, $AD = -1$, du diamètre. Elle a donc pour valeur

$$\sqrt{(+1) \times (-1)} = \sqrt{-1}.$$

Fig. 1.

L'autre raisonnement n'est autre chose que celui de Kühn, complété. Buée considère, comme Kühn, les quatre carrés α, δ, γ, β, de côté $= 1$, formés autour d'un point O, et dont les surfaces sont ± 1. Le carré α, dans les quatre positions qu'il occupe successivement, en tournant chaque fois d'un quart de révolution autour du point O, prend respectivement les quatre valeurs

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1.$$

On peut considérer ces quatre valeurs comme les carrés des quantités

$$+1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1},$$

qui seraient représentées par le côté OA dans ses quatre positions

$$OA, \quad OA', \quad OA'', \quad OA'''.$$

---

[1] Cette analyse est empruntée à l'ouvrage du professeur Matzka : *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra u. s. w.* Prague, 1850.

Si juste cependant que soit la solution donnée par Buée, on ne peut nier qu'elle ne repose sur des arguments plus métaphysiques que mathématiques, et sur une extension mal justifiée des règles du calcul algébrique. Aussi son travail n'a-t-il pas attiré l'attention qu'il aurait méritée, malgré quelques erreurs qui le déparent.

12. Dans la même année 1806, Robert Argand, de Genève, fit imprimer à Paris un opuscule intitulé : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Cet ouvrage, sans nom d'auteur, n'a pas été mis dans le commerce. Nous le connaissons par un extrait qu'en a donné l'auteur dans les *Annales de* Gergonne (t. IV, 1813), et par une note de Cauchy [1].

Argand établit d'abord, en suivant la première méthode de Buée, la représentation de $\sqrt{-1}$ par une longueur portée dans une direction perpendiculaire à celle des lignes réelles.

Il généralise ensuite cette conception, en introduisant la représentation, par un symbole unique, d'une ligne considérée à la fois en grandeur et en direction.

Il définit, comme nous le ferons plus tard, les opérations de multiplication et d'addition effectuées sur les lignes *dirigées;* il en tire la décomposition de ces lignes suivant deux axes rectangulaires, laquelle correspond, en analyse, à la séparation du réel et de l'imaginaire.

Il établit ainsi la formule

$$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q},$$

qui n'est autre chose que le théorème de Moivre, et il en déduit toutes les formules de la trigonométrie.

Argand termine son Mémoire en exposant géométriquement la démonstration donnée par Legendre de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques : *Toute équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, a au moins une racine représentée par une ligne* dirigée, *c'est-à-dire une racine réductible à la forme $a + b\sqrt{-1}$.*

Dans une Note publiée plus tard dans le même volume des

---

(1) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique,* t. IV, p. 179.

Annales, Argand reprend sa démonstration avec plus de détails, et la rend tout à fait rigoureuse. Nous la reproduirons plus loin.

13. Les communications d'Argand avaient eu lieu à l'occasion d'un article publié dans le même recueil scientifique par J.-F. Français, professeur à l'École d'Artillerie de Metz. Celui-ci, d'après quelques indications qui lui étaient parvenues sur les idées d'Argand, sans qu'il en connût l'auteur, avait réussi à en retrouver les principaux résultats, et en avait fait l'objet d'une Note ([1]), à la suite de laquelle Argand réclama la priorité.

On remarque, dans la Note de Français, le premier emploi de la notation

$$r_p,$$

pour désigner une ligne de longueur r, et faisant avec un axe fixe l'angle p, notation très simple, que Cauchy a fini par adopter.

14. Parmi les auteurs qui, depuis Argand jusqu'à Cauchy, ont traité le même sujet, nous citerons seulement Mourey et Warren, dont les travaux ont paru dans la même année 1828.

Mourey, dans une brochure qui a pour titre : *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédié aux amis de l'évidence,* et qui a été réimprimée en 1861, développe complètement les règles du calcul des lignes *dirigées,* et donne une nouvelle démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations. Malheureusement la lecture de ce travail remarquable est rendue difficile et rebutante par une profusion de termes nouveaux et de notations bizarres, le plus souvent inutiles.

Mourey se proposait de publier un Traité beaucoup plus étendu, dont sa brochure n'était qu'un extrait, et où il devait être question, entre autres choses, de la représentation symbolique des lignes dans l'espace, au sujet de laquelle Argand et Français n'avaient rien trouvé de satisfaisant. Nous ignorons ce qu'a pu devenir ce manuscrit, dont la perte serait regrettable.

15. John Warren, *fellow* à l'Université de Cambridge, puis pasteur à Huntingdon, a fait imprimer une brochure intitulée :

([1]) *Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires.* (*Ann. de Math.,* t. IV, p. 61-71.)

A Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. Cambridge, 1828 (154 pages grand in-8°). Cette brochure a été suivie de deux articles moins étendus, insérés dans le *Philosophical Transactions* pour l'année 1829 (1).

Le travail de Warren est plus complet et plus étendu que l'opuscule de Mourey. La discussion des racines de l'unité y est faite avec soin. L'auteur termine par une démonstration des principales formules de la trigonométrie, et par diverses applications au calcul intégral et à la mécanique. On peut lui reprocher seulement, quoique à un moindre degré peut-être qu'à Mourey, l'introduction de notations compliquées et incommodes.

16. Les deux ouvrages que nous venons de citer renferment complètement la théorie élémentaire de la représentation géométrique des imaginaires, ou, si l'on veut, de la représentation par un symbole imaginaire d'une droite quelconque tracée dans un plan.

Cette théorie a été reprise et coordonnée par Cauchy, dans le tome IV de ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (pages 157-355), et l'on peut dire maintenant qu'elle a reçu sa forme définitive.

17. Il n'entre pas dans notre plan de traiter des applications à la géométrie pure et à la mécanique qu'a reçues la théorie dont nous nous occupons. Nous nous contenterons de mentionner les travaux de Scheffler (2) sur l'usage des imaginaires en géométrie analytique, et le Mémoire de Siebeck (3) sur les transformations géométriques déduites de la théorie des imaginaires.

Nous ne pouvons non plus nous occuper du travail considérable publié par M. Maximilien Marie sur les fonctions de variables imaginaires (4), ce travail étant fondé sur un système de représentations des imaginaires essentiellement différent de celui qu'ont adopté Cauchy et Riemann.

---

(1) Matzka : *Versuch einer richtiger Lehre u. s. w.*

(2) *Der Situationskalkul* Brunswick, 1851, 1 vol. in-8°.

(3) *Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen.* (*Journal de Crelle*, t. LV, p. 221-253, 1858.)

(4) *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* (*Journal de Liouville*, 1858-1862.)

CHAPITRE II.

DES QUANTITÉS ARITHMÉTIQUES ET ALGÉBRIQUES, OU QUANTITÉS RÉELLES.

§ Ier.

18. Dans toute question où les données sont exprimables en nombres, la solution se ramène, en définitive, à des opérations d'arithmétique.

La détermination de ces opérations et leur transformation en d'autres opérations équivalentes constituent le but de l'algèbre, ou plutôt un cas particulier du problème plus général qu'embrasse cette science.

L'algèbre, en effet, s'occupe uniquement de la combinaison d'opérations dont les opérations d'arithmétique forment un cas très restreint, et auxquelles on a donné les mêmes noms qu'aux opérations d'arithmétique, parce qu'elles jouissent des propriétés sur lesquelles les combinaisons des opérations d'arithmétique sont fondées.

Par exemple, le résultat d'une addition arithmétique ne change pas lorsqu'on intervertit d'une manière quelconque l'ordre des parties. C'est sur cette propriété que sont fondées les transformations que l'on peut faire subir aux combinaisons d'additions entre elles, ou aux combinaisons de l'addition avec son opération inverse, la soustraction. De là les différentes manières de calculer la valeur d'un polynôme, etc.

Si nous donnons maintenant le nom d'*addition* à une opération quelconque jouissant de la même propriété fondamentale, et le nom de *soustraction* à l'opération inverse, il est clair que tous les résultats obtenus relativement aux transformations de l'addition et de la soustraction en arithmétique subsisteront encore quand il s'agira des mêmes opérations généralisées.

De même, toutes les propriétés de la multiplication, de l'élévation aux puissances et des opérations inverses, la division et l'extraction des racines, découlent du principe général que, dans un produit, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.

Si nous appelons *multiplication* une opération quelconque jouissant de la même propriété relativement à l'interversion des facteurs, et si nous en déduisons, comme en arithmétique, les définitions généralisées de l'élévation aux puissances, de la division et de l'extraction des racines, toutes les règles de l'arithmétique déduites du principe fondamental subsisteront pour les opérations généralisées, quelle que soit la nature de ces opérations, et quels que soient les moyens à employer pour les effectuer.

19. Il ne faut donc pas se représenter l'algèbre comme opérant uniquement sur des quantités numériques, et ne pouvant traiter les grandeurs concrètes sans passer par l'intermédiaire des nombres. Une formule algébrique peut indiquer immédiatement une construction géométrique ou un mouvement mécanique, sans qu'il soit nécessaire en aucune façon de songer à l'évaluation numérique des données du problème.

Ainsi, si l'on définit la multiplication géométrique comme la construction d'un rectangle, l'équation

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

exprime l'équivalence entre une certaine aire et la somme de plusieurs autres, abstraction faite de toute évaluation numérique de ces aires.

20. Après ces remarques sur l'indépendance qui existe entre les règles données par l'algèbre pour la transformation des opérations et la nature même de ces opérations, occupons-nous des divers systèmes de signes que l'algèbre peut employer dans ses formules pour indiquer ces transformations.

On connaît l'emploi des signes de l'arithmétique $+$, $-$, $\times$, ..., pour représenter les transformations algébriques de même nom que les opérations arithmétiques correspondantes.

Mais il est souvent plus avantageux de prendre pour images de ces transformations, non plus des opérations arithmétiques, mais des constructions géométriques, dont la variété beaucoup plus grande permet d'indiquer plus brièvement des combinaisons compliquées, et d'embrasser sous un même énoncé des cas plus généraux, en même temps que ces constructions aident l'intelligence en parlant aux yeux.

Maintenant, lorsqu'on a reconnu qu'une construction géométrique jouit des mêmes propriétés fondamentales qu'une certaine opération d'arithmétique, rien n'empêchera de lui donner le nom de cette opération, et de la soumettre comme elle aux transformations de l'algèbre.

21. Pour en donner un exemple, considérons la règle du parallélogramme des forces. En représentant chaque force par une ligne parallèle à sa direction et de longueur proportionnelle à son intensité, la détermination de la grandeur et de la direction de la résultante de deux forces dépendra des opérations indiquées par la trigonométrie pour la résolution d'un triangle dont on connaît deux côtés avec l'angle qu'ils comprennent. On voit, de plus, aisément que la résultante de deux ou de plusieurs forces ne dépend en aucune manière de l'ordre dans lequel on compose ces forces. Donc l'opération de la composition des forces jouit de la propriété fondamentale de l'addition, de ne pas dépendre, quant au résultat, de l'ordre dans lequel on range les quantités à composer. Rien donc n'empêche de nommer *addition* de deux ou de plusieurs forces, *en grandeur et en direction*, la combinaison d'opérations d'arithmétique ou de constructions géométriques qui sert à la détermination de la résultante au moyen de ses composantes. Dès lors, tous les calculs algébriques relatifs à l'addition et à son opération inverse, la soustraction, s'appliqueront, sans aucun changement, à la composition des forces, et les seuls signes + ou — suffiront pour indiquer tout l'ensemble des opérations d'arithmétique qu'exige la résolution d'un triangle.

Nous allons voir maintenant comment se sont faites les extensions successives des définitions des quantités et des opérations.

§ II.

Des quantités et des opérations arithmétiques.

22. On peut représenter tous les nombres, et plus généralement tous les rapports, commensurables ou non, des grandeurs à leurs unités respectives, par des longueurs portées sur une droite OX, à partir d'un point fixe O, pris pour *origine,* et dans une direction constante de O vers X. Celle des extrémités d'une longueur qui est

la plus voisine du point O, est dite le *commencement* ou l'extrémité *initiale;* l'autre est dite la *fin* ou l'extrémité *finale.*

En adoptant ce mode de représentation, les diverses opérations relatives soit aux nombres, soit aux quantités concrètes, se ramèneront à des constructions géométriques que l'on pourra généralement effectuer, ou du moins dont on concevra toujours la possibilité.

Nous admettrons qu'une grandeur puisse toujours être transportée, sans changer de valeur, soit le long de l'axe OX, soit sur une parallèle à cet axe.

23. Cela posé, pour faire l'*addition* de deux longueurs, on les portera sur la même direction, en faisant coïncider le *commencement* de l'une avec la *fin* de l'autre. La *somme* sera la distance des deux extrémités non communes.

Pour faire la *soustraction,* on portera encore les longueurs sur la même direction, mais en faisant coïncider leurs extrémités *finales.* La *différence* sera la distance des extrémités initiales.

On pourrait encore opérer la soustraction en faisant coïncider les extrémités *initiales.* La différence serait la distance des extrémités finales.

24. La *multiplication* s'effectuera par la construction d'une quatrième proportionnelle, le produit $x = a.b$ de a par b étant le quatrième terme de la proportion

Fig. 3.

$$1 : a = b : x.$$

Sur OX, prenons $O1 = 1$, $Oa = a$; sur $O'X'$, parallèle à OX, prenons $O'b = b$; menons la ligne $1b$, qui rencontre, en un point P, la ligne OY, perpendiculaire à OX, et tirons Pa, qui coupera $O'X'$ en x. La ligne $Ox = x$ sera la quatrième proportionnelle cherchée, et représentera le produit demandé $a.b$.

La *division* se ramène immédiatement à la multiplication, et s'effectue aussi par la construction d'une quatrième proportionnelle. Ainsi le quotient $x = \frac{a}{b}$ sera déterminé par la proportion

$$b : a = 1 : x,$$

et se construira comme le produit de tout à l'heure.

L'élévation aux puissances entières s'opère au moyen de plusieurs multiplications successives.

25. *L'extraction de la racine carrée* revient à la construction d'une moyenne proportionnelle entre la quantité donnée et l'unité.

Les extractions de racines dont les indices sont des puissances de 2 s'opèrent par la répétition de la même construction.

Quant aux racines dont les indices ne sont pas des puissances de 2, on peut les extraire théoriquement à l'aide de l'instrument imaginé par Descartes (*), ou pratiquement par des méthodes d'approximation indéfinie.

Il en serait de même pour la résolution des équations algébriques et pour les opérations transcendantes, correspondantes aux fonctions exponentielles, logarithmiques, circulaires, etc., ainsi que pour la résolution des équations transcendantes.

§ III.

Des quantités et des opérations algébriques.

26. Un problème étant posé, l'algèbre nous enseigne à transformer les conditions données en d'autres qui permettent la résolution, exacte ou approchée, du problème à l'aide des opérations de l'arithmétique ou des constructions géométriques. Il peut se faire, dans certains cas, que l'on soit ainsi conduit à des opérations inexécutables, telle que celle de soustraire un plus grand nombre d'un plus petit.

L'impossibilité du problème, accusée par une opération impossible, peut être tantôt *absolue,* tantôt *apparente.* Elle sera absolue lorsque les conditions exprimées par l'équation du problème correspondront complètement à celles de l'énoncé, celui-ci ne pouvant donner lieu qu'à l'équation reconnue impossible.

D'autres fois, l'impossibilité est seulement *apparente.* C'est lorsque le problème pouvant offrir plusieurs cas entre lesquels on ne sait pas choisir *a priori,* on a mis un seul de ces cas en équation, et que le cas que l'on a pris n'est pas celui qui a lieu réellement.

(*) *Géométrie,* livre II.

27. On peut se demander maintenant s'il n'est pas possible de donner à l'idée de quantité et aux définitions des opérations une extension analogue à celle que l'on a déjà admise en arithmétique, pour passer du calcul des nombres entiers au calcul des fractions, cette extension devant permettre d'embrasser dans une même formule les divers cas d'une même question, et faire ainsi disparaître l'impossibilité, lorsqu'elle n'est qu'apparente.

Choisissons un exemple particulier, le plus simple possible. Une personne reçoit une somme a et perd une somme b : on demande quel changement a subi l'état de sa fortune.

Il y a d'abord deux cas à distinguer, le changement pouvant avoir eu pour résultat soit un gain, soit une perte. Figurons géométriquement les opérations nécessaires à la solution du problème.

Si l'on suppose d'abord qu'il y ait un gain, prenons ce gain pour inconnue. Portons, sur la droite Ox, une longueur $OA = a$, et retranchons-en la longueur $AB = b$. Alors la différence OB représentera le gain cherché.

Fig. 4.

O B A x

Si l'on suppose, au contraire, qu'il y ait eu perte, on portera, sur une ligne Ox', une longueur $OB' = b$, et l'on en soustraira $B'A' = a$. Le résultat $O'A'$ sera la perte cherchée.

Fig. 5.

O A' B' x'

Le premier cas est possible, si l'on a $a > b$; le second, si l'on a $a < b$: c'est ce que supposent les deux figures.

Voyons maintenant ce que deviendrait la solution du premier cas pour $a < b$. De la ligne OA, il s'agirait de soustraire la ligne plus grande AB, ce qui est arithmétiquement impossible. Si néanmoins nous exécutons la même construction géométrique que dans le cas où la soustraction est possible, le point B se trouvera porté à gauche du point O, à une distance $OB = b - a$. Or, cette distance donne précisément la valeur de la perte qui a réellement lieu. Donc la même construction géométrique peut servir à résoudre les deux cas du problème, et la solution sera toujours représentée par la distance OB, portée à droite du point O, lorsque c'est un gain, à gauche, lorsque c'est une perte.

Fig. 6.

B A

B O A x

Cette construction a, de plus, l'avantage de pouvoir faire connaître en même temps l'état de la fortune du possesseur. Supposons,

en effet, que cette fortune soit représentée par la longueur ΩO.

Fig. 7.

Il faudra lui ajouter la solution OB, lorsque ce sera un gain; l'en retrancher, lorsque ce sera une perte. Il faudra donc porter la solution, dans le premier cas, à droite, dans le second cas, à gauche du point O, et c'est précisément ce que donne la construction précédente.

28. On voit aisément que la construction géométrique du premier cas revient à porter l'un à la suite de l'autre, en sens opposés, les axes Ox, $O'x'$ (*fig.* 4 et 5), sur lesquels sont comptés respectivement les gains et les pertes. Le passage du gain à la perte, qui se fait par degrés continus, lorsqu'on fait croître b, par exemple, se trouvera indiqué par le passage du point B de la droite à la gauche de l'origine O, et l'on n'aura plus à se demander sur lequel des deux axes il faut porter le résultat, la construction le portant d'elle-même sur l'axe convenable.

Fig. 8.

Les deux axes n'étant plus terminés l'un et l'autre au point O, et se servant mutuellement de prolongement, le point B ne risquera plus, pour ainsi dire, de tomber dans le vide, lorsqu'on aura fait la construction du gain pour le cas de la perte, ou *vice versa*. La soustraction définie géométriquement ne sera donc plus impossible, comme pouvait l'être la soustraction arithmétique.

29. Si donc nous désignons par le signe — la soustraction géométrique, et par x le segment OB, la solution du problème sera toujours fournie par l'équation

$$x = a - b,$$

la *longueur* de OB donnant la grandeur du gain ou de la perte, et la *direction* de OB indiquant si c'est à un gain ou à une perte que s'applique cette grandeur.

Si maintenant k représente la fortune primitive, y la fortune actuelle du possesseur, on aura, s'il y a gain,

$$y = k + \mathrm{OB};$$

s'il y a perte,

$$y = k - \mathrm{OB}.$$

Dans le premier cas, on a évidemment,

$$y = k + x.$$

Voyons comment nous pourrons faire rentrer le second cas dans la même formule.

30. Nous avons défini, dans la représentation des grandeurs arithmétiques ou absolues, le point initial comme étant l'extrémité la plus rapprochée de l'origine O, le point final comme étant l'extrémité la plus éloignée de cette origine. En d'autres termes plus généraux, nous avons établi, quelle que soit la position du segment considéré, que l'on va du point initial au point final en marchant *de la gauche vers la droite.*

Considérons maintenant le segment OB, qui, suivant sa direction, représente un gain ou une perte. En se rappelant que l'axe $x'Ox$, indéfini dans les deux sens, a été formé par la juxtaposition des axes $Ox, O'x'$ (*fig. 4* et *5*), indéfinis chacun dans un seul sens, on voit que O doit être considéré comme le point initial soit du gain, soit de la perte. Donc, dans la construction généralisée, on ira du point initial au point final de la solution x, en marchant *de gauche à droite* si x représente un gain, et *de droite à gauche* si x représente une perte.

D'après ces conventions sur les noms à donner aux extrémités du segment x, on voit que, si l'on étend à tous les cas la définition que nous avons donnée (nº 23), de l'*addition géométrique,* la soustraction de la longueur OB, dans le cas où elle devra avoir lieu, sera précisément ce que nous devons appeler *addition* du segment *dirigé* x.

Donc, dans tous les cas, si l'on adopte pour l'addition et pour la soustraction leurs définitions géométriques, en ayant égard à la transposition des noms des extrémités qui correspond au changement de direction du segment, on aura, pour la solution complète du problème, les équations

$$x = a - b,$$
$$y = k + x,$$

dont la première fera connaître le gain ou la perte (celle-ci étant considérée comme un gain *négatif*), et l'autre, la fortune actuelle du possesseur.

On voit que la soustraction géométrique se fait ici en prenant la différence des valeurs absolues, et portant le résultat dans le sens affecté au plus grand terme; et que l'addition géométrique répond, suivant le sens de x, soit à une addition, soit à une soustraction arithmétique.

31. Nous pouvons encore compléter la généralisation que nous avons commencée. Dans la formule

$$y = k + x,$$

l'addition géométrique suffit pour représenter à la fois l'addition d'un gain ou la soustraction d'une perte. Si, au lieu de représenter par x un gain porté à droite ou une perte portée à gauche, nous avions représenté par x une perte portée à droite ou un gain porté à gauche, nous aurions obtenu, au lieu de la formule précédente, la formule

$$y = k - x,$$

qui aurait également répondu à tous les cas, en donnant à la soustraction géométrique la même extension que nous avons donnée à l'addition. Donc, lorsque deux quantités, se succédant l'une à l'autre d'une manière continue, sont représentées par des segments pris sur une même droite dans des sens opposés, l'addition géométrique de l'une peut être remplacée par la soustraction géométrique de l'autre, et réciproquement; de sorte que l'on passera du cas de l'une au cas de l'autre en changeant simplement le signe + ou — qui précédait la première, c'est-à-dire en remplaçant $+ x$ par $- x$, $- x$ par $+ x$.

On peut indiquer ce changement d'avance une fois pour toutes, en convenant que, si l'une des quantités est représentée par $+ x$, l'autre le sera par $- x$, et établissant, pour règles des opérations algébriques, que l'addition se fera en laissant à chaque terme son signe, la soustraction en donnant à chaque terme un signe contraire.

Cette convention que nous avons faite relativement au résultat x de la première partie de la question, on peut aussi l'étendre aux données, et au lieu de représenter par a et b les grandeurs d'un gain et d'une perte, et d'indiquer explicitement par les signes + et — la nature de ces quantités, on peut convenir que chacune

des lettres a, b représentera soit un gain, soit une perte, et sera figurée dans le premier cas par une ligne dirigée vers la droite, dans le second par une ligne dirigée vers la gauche, les lettres a et b renfermant en elles cette notion distinctive de direction. Alors la formule

$$x = a - b$$

pourra être remplacée par la formule

$$x = a + b,$$

pareille à la formule

$$y = k + x,$$

et pouvant servir à la solution non seulement de la question actuelle, mais encore des autres questions correspondantes aux cas où a représenterait une perte ou b un gain.

32. Remarquons, enfin, que le problème dont la solution est donnée par l'équation

$$y = k + x, \qquad \text{ou} \qquad y = k + a + b$$

peut, dans certains cas, être possible ou impossible, suivant que l'on donnera ou non à la lettre y la faculté de représenter une dette aussi bien qu'un avoir. Dans le premier cas, on supposerait que la personne, ayant perdu plus qu'elle ne possède, pourrait contracter une dette, en ayant recours à son crédit. Dans le second cas, on ne considérerait que les paiements réalisables, et alors un paiement surpassant l'avoir serait considéré comme impossible.

Voilà donc encore un exemple d'un cas d'impossibilité dont les circonstances ne peuvent être exprimées par des équations.

33. On donne le nom de quantités *positives* à celles qui sont représentées par des lignes dirigées dans le sens primitivement assigné aux quantités *arithmétiques* ou *absolues* de même nom, et le nom de quantités *négatives* à celles qui sont représentées par des lignes dirigées en sens contraire.

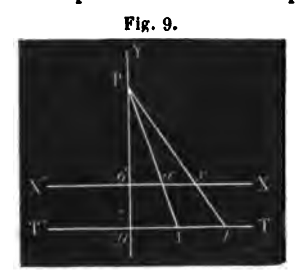
Nous désignerons provisoirement, avec Cauchy, sous le nom commun de *quantités algébriques* les quantités *dirigées,* c'est-à-dire les quantités *positives* et *négatives* représentées par des lettres comprenant implicitement le signe de direction.

§ IV.

34. Prenons pour second exemple la relation qui exprime le mouvement uniforme d'un point sur une droite.

Représentons les temps par des segments pris sur la droite OT, et les espaces par des segments pris sur la droite parallèle O'X. Soit $O'a = a$ l'espace parcouru dans le temps $O1 = 1$. Les espaces étant proportionnels aux temps, l'espace x, correspondant au temps t, sera donné par la proportion

Fig. 9.



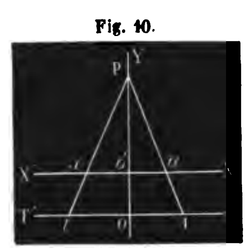
$$1 : t = a : x,$$

d'où l'on voit comment la valeur $x = at$ se construit au moyen d'une quatrième proportionnelle.

Cette construction, qui consiste à déterminer d'abord le point P où la droite $\overline{1a}$ rencontre la perpendiculaire OY, puis à joindre P au point t par une droite qui rencontre O'X à la distance $O'x = x$, servira évidemment aussi à faire connaître t lorsqu'on donnera x.

35. Si l'on considère les positions du mobile avant le temps que l'on a pris pour origine, on voit que le mobile se trouvait sur O'X', *à gauche* du point O', en x' par exemple. Si l'on applique à ce cas la construction du numéro précédent pour trouver le temps au moyen de l'espace, on obtiendra pour représentation du temps un segment Ot', de grandeur égale à $\frac{O'x'}{Oa}$, et situé à gauche de O. On est conduit, par les mêmes raisons que ci-dessus, à considérer ce temps t' comme négatif, ainsi que l'espace x'. L'équation

Fig. 10.

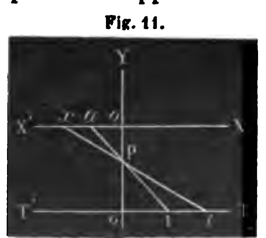


$$x' = at'$$

représentera toujours la solution, en établissant cette règle des signes, que le produit d'un nombre positif a par une quantité t', positive ou négative, est de même signe que t'.

36. Nous avons supposé jusqu'ici le mouvement s'effectuant dans la direction même que l'on a choisie pour représenter les temps positifs. Supposons maintenant le mouvement dirigé en sens contraire, et continuons à compter les segments positivement à droite, négativement à gauche. Pour $t = 1$, l'espace $O'a$ sera négatif, et la quatrième proportionnelle x aux grandeurs 1, a, t (pour t positif), devra être dirigée dans le même sens que $O'a$, et par suite devra être négative. C'est précisément ce qu'indique la construction géométrique étendue au cas où $O'a$ est porté vers la gauche. Donc la formule

Fig. 11.



$$x = at$$

subsistera pour a négatif et t positif, à la condition de donner à x le signe de a.

Enfin, si, pour a négatif, on prend aussi t négatif, l'espace $O'x$ devra être égal en grandeur au produit

Fig. 12.

$$O'a \times Ot,$$

et porté vers la droite, c'est-à-dire positif, et c'est ce que donne encore la construction.

37. On voit donc que la construction de la multiplication, définie d'abord pour les grandeurs absolues, puis étendue aux grandeurs pourvues de signes de direction, conduit à la règle des signes pour la multiplication des quantités algébriques, et, par suite, à toutes les conséquences de cette règle.

Il est évident que tout ce que nous avons dit pour la multiplication s'applique aussi à la division.

38. Il résulte de là, en passant à l'élévation aux puissances, que toute puissance paire d'une quantité soit positive, soit négative, est positive, et que toute puissance impaire d'une quantité est de même signe que cette quantité.

Si l'on considère enfin l'opération inverse de l'élévation aux puissances, c'est-à-dire l'extraction des racines, on voit qu'étant

donnée une quantité quelconque, il existera toujours une racine de degré impair quelconque de cette quantité, et que cette racine unique sera de même signe que la puissance donnée.

Étant donnée une quantité positive, on pourra toujours lui trouver deux racines d'un degré pair quelconque, égales et de signe contraire.

Mais une quantité négative ne saurait être produite par l'élévation d'aucune quantité à une puissance paire. Donc une racine de degré pair d'une quantité négative est une quantité *impossible* ou *imaginaire,* tant que l'on n'aura pas rendu l'opération de l'extraction de la racine possible dans tous les cas, par une nouvelle extension de l'idée de quantité et de la définition des opérations.

Les quantités arithmétiques et les quantités algébriques, ou, en d'autres termes, les quantités positives et les quantités négatives, sont désignées par la dénomination commune de *quantités réelles*.

CHAPITRE III.

DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES, OU QUANTITÉS COMPLEXES.

§ Ier.

Définition des quantités géométriques.

39. Nous appellerons provisoirement, d'après Cauchy, *quantité géométrique* une droite donnée *en grandeur et en direction,* cette direction n'étant plus assujettie, comme pour les quantités algébriques, à être parallèle à une droite donnée, mais étant quelconque dans le plan.

Deux quantités géométriques sont dites *égales* géométriquement lorsqu'elles ont même longueur et même direction, de sorte qu'on puisse les faire *coïncider* l'une avec l'autre, c'est-à-dire leur donner à la fois même extrémité *initiale* et même extrémité *finale,* en transportant l'une d'entre elles parallèlement à elle-même.

La longueur de la droite s'appelle le *module* de la quantité géométrique. L'angle que fait sa *direction* avec un axe fixe s'appelle son *argument.*

Deux quantités géométriques sont donc égales lorsqu'elles ont des modules égaux et des arguments soit égaux, soit différant l'un de l'autre d'un multiple quelconque de quatre angles droits. Ainsi l'égalité de deux quantités géométriques z, z' entraîne les deux égalités numériques

$$\text{mod. } z = \text{mod. } z',$$

et

$$\text{arg. } z = \text{arg. } z',$$

ou du moins

$$\text{arg. } z = \text{arg. } z' + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif.

En désignant par r le module et par p l'argument d'une quantité géométrique, nous représenterons, du moins provisoirement, la quantité géométrique par la notation

$$r_p.$$

Une quantité positive peut être regardée comme une quantité géométrique d'argument 0 ou $2k\pi$; une quantité négative, comme une quantité géométrique d'argument π ou $(2k+1)\pi$.

40. Au lieu de considérer la droite elle-même, il suffit de considérer ses deux extrémités, en ayant soin de distinguer l'extrémité *initiale,* d'où partirait un point pour décrire la droite dans la direction donnée, de l'extrémité *finale,* où ce point s'arrêterait.

Si l'extrémité initiale est fixe, et qu'on la prenne pour *origine,* la droite sera déterminée par sa seule extrémité finale, dont le module et l'argument seront les coordonnées polaires. Alors la quantité géométrique pourra être déterminée par un seul point du plan; et réciproquement, tout point du plan pourra être représenté par une quantité géométrique ayant ce point pour extrémité finale, et l'origine des coordonnées pour extrémité initiale.

§ II.

Addition et soustraction des quantités géométriques.

41. Après avoir défini *l'égalité* des quantités géométriques, définissons maintenant leur *addition.*

Nous étendrons aux quantités géométriques la définition de cette opération donnée pour les quantités arithmétiques et algébriques. Pour ajouter deux quantités géométriques, on transportera l'une d'elles parallélement à elle-même, de manière que son extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale de l'autre. La droite qui va de l'extrémité initiale de la seconde à l'extrémité finale de la première est dite la *somme* des deux quantités géométriques.

On voit, par cette construction, que la somme de deux quantités géométriques est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent ces quantités géométriques.

La somme de deux quantités géométriques ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des parties. Ainsi l'on a

Fig. 13.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OB} + \overline{BC},$$

en indiquant par un trait supérieur une droite prise en grandeur et en direction, et considérée comme une quantité géométrique.

A ce point de vue, on peut dire qu'un côté d'un triangle est égal à la somme *géométrique* des deux autres côtés.

De même, la résultante de deux vitesses, de deux accélérations,

de deux forces, etc., est égale à la somme géométrique des composantes.

42. De la définition de l'addition résulte immédiatement la définition de l'opération inverse, c'est-à-dire de la soustraction. Si l'on a

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB},$$

il en résultera, par définition,

$$\overline{OA} = \overline{OC} - \overline{OB}.$$

La soustraction s'effectuera donc en faisant coïncider les extrémités finales des deux termes de la différence, et prenant pour cette différence la droite qui va de l'extrémité initiale du terme positif à l'extrémité initiale du terme négatif.

43. On voit que, si l'on considère une quantité géométrique $\overline{OB'}$, égale et opposée à $\overline{OB}$, la construction qui donnera $\overline{OC} - \overline{OB}$ sera la même que celle qui donnera $\overline{OC} + \overline{OB'}$. Donc si l'on considère deux quantités géométriques *opposées*, c'est-à-dire ayant des modules égaux et des arguments différant de π (ou d'un multiple impair de π), l'addition de l'une de ces deux quantités équivaudra à la soustraction de l'autre.

Fig. 14.

Si donc nous représentons l'une de ces quantités par $+z$, nous serons conduits, comme nous l'avons été dans le cas particulier des quantités *algébriques*, à représenter l'autre par $-z$.

On a donc

$$r_{p+\pi} = -r_p,$$

et, plus généralement,

$$r_{p+(2k+1)\pi} = -r_p,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif.

44. Une quantité géométrique doit être considérée comme nulle, quel que soit son argument, lorsque son module sera nul. Il est

clair alors que l'addition ou la soustraction de cette quantité n'auront aucune influence.

La somme de deux quantités opposées, ou, ce qui revient au même, la différence de deux quantités égales est nulle.

45. La somme de plusieurs quantités géométriques est le côté qui ferme le polygone dont les autres côtés sont égaux, en grandeur et en direction, aux quantités géométriques données.

Elle est nulle lorsque le polygone se ferme de lui-même.

Il est aisé de voir que la somme d'un nombre quelconque de quantités géométriques ne dépend pas de l'ordre des parties.

Les théorèmes connus de géométrie font voir que les modules de la somme et de la différence de deux quantités sont compris l'un et l'autre entre la somme et la différence des modules de ces quantités, et que le module de la somme de plusieurs quantités est moindre que la somme des modules de ces quantités.

46. *Décomposition d'une quantité géométrique en ses composantes rectangulaires.* — Si l'on projette une quantité géométrique r_p sur un axe Ox, la projection, que nous désignerons par x, sera, d'après la convention établie pour les quantités algébriques, positive ou négative, suivant que p (ou, s'il est plus grand que deux angles droits, son complément à 4 droits, $2\pi - p$) sera aigu ou obtus.

Le rapport, positif ou négatif, de x à la longueur r est dit le *cosinus* de l'angle p. On a évidemment

$$\cos(-p) = \cos(2\pi - p) = \cos p\,.$$

Si l'on projette de même r_p sur un axe Oy, faisant avec la partie positive de Ox un angle droit (compté dans le sens des angles croissants), la projection y sera positive ou négative, suivant que l'angle $p - \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} - p$ (ou son complément à 2π) sera aigu ou obtus.

Le rapport, positif ou négatif,

$$\frac{y}{r} = \cos\left(p - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right)$$

est dit le *sinus* de l'angle p. On voit aisément que

$$\sin(-p) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right) = -\sin p.$$

On a ainsi, par définition, pour les projections de r_p sur les deux axes rectangulaires Ox, Oy,

$$x = r\cos p,$$
$$y = r\sin p.$$

Ces deux projections sont les *coordonnées rectangulaires* du point dont r et p sont les coordonnées polaires.

47. La projection sur l'axe des x est une quantité géométrique ayant pour module la longueur absolue de la projection $r\cos p$, et pour argument 0 ou π, suivant qu'elle est positive ou négative.

La projection sur l'axe des y est une quantité géométrique ayant pour module la longueur absolue de $r\sin p$, et pour argument $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{3\pi}{2}\right)$, suivant qu'elle sera positive ou négative.

Nous pourrons considérer, pour plus de simplicité, les x négatifs comme ayant un module négatif et un argument nul, de même que les x positifs. Pour faire la somme géométrique de deux ou de plusieurs x de signes quelconques, on fera alors la somme *algébrique* des modules, et l'on donnera à cette somme l'argument zéro, de sorte que l'on aura

$$x_0 + x'_0 + x''_0 + \cdots = (x + x' + x'' + \cdots)_0.$$

De même, on considérera les y négatifs comme ayant un module négatif, et un argument $= \frac{\pi}{2}$, de même que les y positifs, et l'on aura, d'après cette convention,

$$y_{\frac{\pi}{2}} + y'_{\frac{\pi}{2}} + y''_{\frac{\pi}{2}} + \cdots = (y + y' + y'' + \cdots)_{\frac{\pi}{2}}.$$

48. Une quantité géométrique r_p peut être regardée comme la somme géométrique de ses deux projections ou *composantes* rectangulaires x ou x_0, y ou $y_{\frac{\pi}{2}}$, de sorte qu'on aura

$$r_p = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}},$$

les modules, positifs ou négatifs, x et y étant déterminés par les équations

$$x = r\cos p,$$
$$y = r\sin p.$$

d'où l'on tire

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$p = \text{arc cos}\frac{x}{r} = \text{arc sin}\frac{y}{r} = \text{arc tang}\frac{x}{y}.$$

Remarque. L'expression arc tang $\frac{y}{x}$ convient également à deux directions opposées, aussi bien à celle qui répond aux valeurs $\frac{-x}{r}$, $\frac{-y}{r}$ du cosinus et du sinus, qu'à celle qui répond aux valeurs $\frac{+x}{r}$, $\frac{+y}{r}$ de ces mêmes quantités. Pour abréger l'écriture, et pouvoir nous contenter dans tous les cas d'introduire l'expression de l'arc tangente, qui est généralement la plus simple, nous conviendrons que la notation arc tang $\frac{y}{x}$, ou, plus explicitement, arc tang $\frac{+y}{+x}$ représente l'arc dont le sinus a le *même signe* que $+y$, et le cosinus le *même signe* que $+x$. D'après cette convention, on aura

$$\text{arc tang}\frac{-y}{-x} = \text{arc tang}\frac{+y}{+x} \pm \pi.$$

49. On peut donc toujours considérer une quantité géométrique comme équivalente à la *somme* de deux composantes suivant des directions rectangulaires entre elles. C'est à ce point de vue que l'on a donné aux quantités géométriques le nom de quantités *complexes,* qui est le plus généralement adopté, et que nous emploierons le plus souvent dans ce qui va suivre.

50. L'addition de deux ou de plusieurs quantités complexes se ramène à l'addition de leurs composantes, et, d'après ce que nous avons vu, l'addition de ces composantes s'exécute sur chaque axe, d'après la règle de l'addition des quantités réelles. On a ainsi

$$r_p + r'_{p'} + r''_{p''} + \cdots = \left(x_0 + x'_0 + ''x_0 + \cdots\right) + \left(y_{\frac{\pi}{2}} + y'_{\frac{\pi}{2}} + y''_{\frac{\pi}{2}} + \cdots\right)$$
$$= (x + x' + x'' + \cdots)_0 + (y + y' + y'' + \cdots)_{\frac{\pi}{2}}.$$

La somme de plusieurs quantités géométriques Σr_p est nulle, lorsque les deux conditions nécessaires et suffisantes

$$\Sigma x = \Sigma r \cos p = 0,$$
$$\Sigma y = \Sigma r \sin p = 0$$

sont satisfaites.

51. Si l'on a une égalité entre deux quantités complexes, cette égalité se décomposera en deux autres égalités, l'une entre les composantes *horizontales,* l'autre entre les composantes *verticales.*

On peut profiter de cette réunion de deux égalités en une seule pour présenter les formules sous la forme la plus simple.

Soit, par exemple, un triangle rectiligne ABC. Prenons pour arc de projection une droite quelconque Ax, faisant un angle θ avec le côté AB. L'égalité géométrique

Fig. 15.

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

pourra s'écrire

$$c_\theta = b_{\theta + A} + a_{\theta - B}.$$

En donnant à θ diverses valeurs convenables, et ayant égard à l'équation

$$A + B + C = \pi,$$

cette formule fournira successivement toutes les formules de la trigonométrie rectiligne, et elle les résume toutes de la manière la plus succincte.

52. *Des séries à termes complexes.* — De ce que nous venons d'exposer sur l'addition des quantités complexes, il résulte qu'une série dont les termes sont des quantités complexes est *convergente,* quels que soient les arguments, toutes les fois que la série des modules est convergente, pourvu que l'on définisse la convergence des séries complexes par une extension de la définition de la convergence des séries nouvelles.

Une série réelle est dite *convergente* lorsque, pour n assez grand, la somme des k termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tend vers zéro, quel que soit k, pourvu qu'il ne dépende pas de n.

De même, une série complexe sera dite *convergente*, lorsque, pour n assez grand, le module de la somme des k termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tendra vers zéro, quel que soit k, indépendant de n.

Si la série des modules est convergente, en la représentant par

$$r^{(1)} + r^{(2)} + \dots + r^{(n)} + \dots,$$

alors on devra avoir

$$r^{(n+1)} + r^{(n+2)} + \dots + r^{(n+k)}$$

infiniment petit, pour n infini, quel que soit k.

Soit maintenant

$$z^{(1)} + z^{(2)} + \dots + z^{(n)} + \dots$$

la série complexe, dont les termes ont pour modules

$$r^{(1)},\quad r^{(2)}, \dots,\quad r^{(n)}, \dots .$$

Le module de la somme des k termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$,

$$z^{(n+1)} + z^{(n+2)} + \dots + z^{(n+k)},$$

est moindre que la somme des modules de ces termes, laquelle tend, par hypothèse, vers zéro pour n infini, quel que soit k. Donc il en est de même *a fortiori* du module de la somme $z^{(n+1)} + \dots + z^{(n+k)}$. Donc la série complexe est convergente, quels que soient d'ailleurs les arguments de ses termes.

On voit aisément que la convergence d'une série complexe entraîne la converge des deux séries réelles qui ont pour termes les composantes horizontales et verticales des termes de la série complexe, et réciproquement.

53. Considérons une quantité complexe variable, dont l'extrémité initiale est fixe, et que l'on peut représenter par sa seule extrémité finale. Nous désignerons, dans ce cas, par la même lettre z la quantité complexe r_p elle-même et son extrémité finale.

Si le point z passe de la position z à la position z', la différence $z' - z$ représentera en grandeur et en direction la distance de ces deux positions.

Si l'on fait varier d'une manière continue la quantité complexe z, ou, ce qui revient au même, son module r et son argument p, ou encore ses deux composantes x et y, le point z se déplacera, en décrivant une certaine ligne dont la forme dépendra de la relation arbitraire que l'on établira entre les coordonnées polaires r et p, ou entre les coordonnées rectangulaires x et y. Nous appellerons cette ligne le *chemin* ou la *trajectoire* du point z.

Lorsqu'on suppose les deux positions z, z' infiniment voisines, leur distance, représentée en grandeur et en direction par la différence infiniment petite $z' - z$, sera dite la *différentielle* de la variable z, et nous la désignerons, en conséquence, par le symbole dz.

Toutes les règles de la différentiation des quantités réelles qui ne dépendent que des règles de l'addition et de la soustraction, subsistent aussi pour les quantités complexes. On aura ainsi

$$dz = d(x_0) + d(y_{\frac{\pi}{2}}) = (dx)_0 + (dy)_{\frac{\pi}{2}}.$$

54. Le module de la quantité complexe dz, que nous représenterons par ρ, a pour valeur

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 dp^2}.$$

C'est l'élément infiniment petit ds de la courbe décrite par le point z.

Pour que dz soit infiniment petit, il faut et il suffit que son module ρ soit infiniment petit.

Mais l'argument de dz, c'est-à-dire l'angle

$$\varphi = \text{arc tang} \frac{dy}{dx}$$

n'est assujetti à aucune condition, et peut prendre une valeur finie quelconque, dépendant de la forme du chemin de z.

55. Le chemin de z est la limite du polygone infinitésimal qui a pour côtés les accroissements dz successifs. La distance des deux positions extrêmes de z est la limite de la somme géométrique des côtés de ce polygone. Nous représenterons cette limite de somme d'éléments infiniment petits par le signe d'intégration.

Si donc le point z, partant de l'origine, arrive en Z après avoir décrit un chemin quelconque, la quantité géométrique $\overline{OZ}$, ou le point Z qui la représente, seront désignés par l'intégrale

$$(1) \qquad Z = \int_0^Z dz ,$$

comme dans le cas des quantités réelles.

De même la droite qui joint les deux points $z^{(0)}$ et Z de la trajectoire sera égale à l'intégrale

$$(2) \qquad Z - z^{(0)} = \int_{z^{(0)}}^Z dz .$$

Si le chemin de z est une courbe fermée, alors en revenant au point de départ on a $Z = z^{(0)}$. Donc l'intégrale $\int dz$, prise tout le long d'un *contour* fermé quelconque, est nulle.

D'après ce que nous voyons ici, les valeurs des intégrales (1) et (2) ne dépendent que des limites de l'intégration, et nullement du chemin parcouru entre ces deux limites. C'est grâce à cette indépendance que nous avons obtenu les valeurs de ces intégrales sous la même forme que dans le cas d'une variable réelle. Mais nous verrons plus tard qu'il ne faudrait pas étendre trop loin cette généralisation.

§ III.

Multiplication, division et élévation aux puissances entières des quantités géométriques.

56. La définition de la multiplication par une quantité réelle se déduit de la définition de l'addition pour les quantités complexes comme pour les quantités réelles.

La multiplication par un nombre entier m est l'addition de m quantités égales au multiplicande. Ces quantités égales ayant même argument, la multiplication se réduira à la multiplication du module, de sorte qu'on aura

$$(1) \qquad r_p \times m = (mr)_p .$$

De la multiplication par un nombre entier on passe, à l'aide du raisonnement connu, à la division par un nombre entier, puis à la multiplication par une fraction, et enfin, en invoquant le prin-

cipe des limites, à la multiplication par un nombre incommensurable. On en conclura, dans tous les cas, que, pour multiplier une quantité géométrique r_p par un nombre quelconque m, commensurable ou non, il suffit de multiplier le module r par ce nombre, sans changer l'argument.

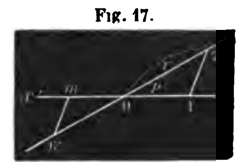
On peut maintenant représenter la multiplicateur m par le rapport de deux lignes, $0m:01$. Soit alors $\overline{0z} = r_p$ le multiplicande.

Fig. 16.

On multipliera le module $0z$ par m en construisant le triangle $0mw$ semblable à $01z$, et puisque l'argument ne doit pas changer, $\overline{0w}$ représentera, en grandeur et en direction, le produit de z par m.

On voit que la construction revient à joindre les points 1 et z, et à mener par l'extrémité m du multiplicateur une parallèle mw à $1z$, jusqu'à la rencontre de la droite $0z$.

57. Le multiplicateur arithmétique $0m$ peut être considéré comme une quantité algébrique positive. Étendons maintenant la même construction au cas où le multiplicateur est une quantité négative. Alors le produit $0w$, au lieu d'avoir la même direction que $0z$, sera dirigé suivant le prolongement de $0z$.


Fig. 17.

On a donc

$$r_p \times (-m) = (mr)_{p+\pi} = -(mr)_p \, . \tag{2}$$

Or, la quantité algébrique $\pm m$ peut être regardée comme une quantité géométrique de module m et d'argument 0 ou π, et on peut la représenter par m_0 ou par m_π. Dès lors, les deux formules précédentes (1) et (2) deviennent

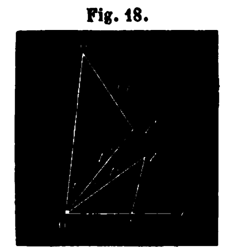
$$r_p \times m_0 = (r.m)_{p+0} \, ,$$
$$r_p \times m_\pi = (r.m)_{p+\pi} \, ,$$

et l'on peut dire que la multiplication d'une quantité complexe par une quantité algébrique s'effectue en faisant le produit des modules et l'addition des arguments des deux facteurs.

58. Supposons maintenant que l'on applique la même construction au cas où le multiplicateur réel $\pm m$ est remplacé par une

quantité géométrique quelconque $z' = r'_{p'}$. On devra construire sur Oz' un triangle $Oz'w$ semblable au triangle $O1z$. La quantité géométrique $\overline{Ow}$, ainsi obtenue, aura pour module $Ow = rr'$ et pour argument $wOx = p + p'$.

Fig. 18.



Il est clair que l'on aurait obtenu la même quantité $\overline{Ow}$, en construisant sur Oz un triangle Ozw semblable à $O1z'$.

On peut donc, dans cette opération, prendre l'une pour l'autre les deux quantités z et z'. Cette opération jouit donc de la propriété fondamentale de la multiplication. Donc il est permis de lui donner le nom de *multiplication.*

Nous définirons donc la *multiplication des quantités complexes* comme *une opération qui consiste dans la multiplication des modules et dans l'addition des arguments des facteurs;* de sorte que l'on a, par définition,

$$r_p \times r'_{p'} = (rr')_{p+p'}.$$

Cette règle comprend, comme cas particulier, la multiplication de deux facteurs algébriques ou d'un facteur complexe par un facteur algébrique.

59. Si l'on considère maintenant un nombre quelconque de facteurs complexes,

$$r_p, \quad r'_{p'}, \quad r''_{p''}, \ldots,$$

il est aisé de voir que, de la définition donnée pour le cas de deux facteurs, résultera la définition pour le cas d'un nombre quelconque de facteurs, laquelle sera exprimée par la formule

$$r_p \times r'_{p'} \times r''_{p''} \times \cdots = (rr'r''\ldots)_{p+p'+p''+\ldots};$$

et de cette définition résulte immédiatement que le théorème sur l'interversion des facteurs d'un produit s'étend au cas où le nombre des facteurs est quelconque.

On en conclut que toutes les règles de l'algèbre relatives à la multiplication des monômes s'appliquent aux produits de quantités complexes.

Pour diviser l'une par l'autre deux quantités complexes, on

prendra le quotient des modules et la différence des arguments, de sorte que l'on aura

$$\frac{r_p}{r'_{p'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{p-p'}.$$

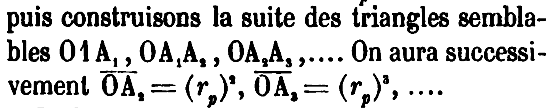
60. Pour élever une quantité complexe à une puissance entière, on élèvera le module à cette puissance, et l'on multipliera l'argument par l'exposant de la puissance. Ainsi,

$$\left(r_p\right)^m = \left(r^m\right)_{mp}.$$

Cette formule est encore vraie lorsque m est un nombre entier négatif.

On peut construire simplement la puissance m de la quantité géométrique r_p. Pour cela, soit $01 = 1_0$, $\overline{OA_1} = r_p$. Joignons $1A_1$; puis construisons la suite des triangles semblables $01A_1$, OA_1A_2, OA_2A_3,.... On aura successivement $\overline{OA_2} = (r_p)^2$, $\overline{OA_3} = (r_p)^3$, ...

Fig. 19.



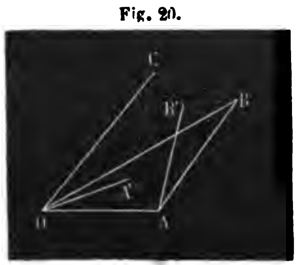
Le lieu des points 1, A_1, A_2, ... est une spirale logarithmique.

On peut abréger la construction dans certains cas. Ainsi, pour obtenir $(r_p)^4$, on construira $\overline{OA_2} = (r_p)^2$; puis on fera le triangle OA_2A_4 semblable à $01A_1$, ce qui donnera

$$\overline{OA_4} = (\overline{OA_2})^2 = \left[(r_p)^2\right]^2 = (r_p)^4.$$

61. Soient maintenant deux quantités complexes $\overline{OA} = z$, $\overline{AB} = z'$. Pour faire les produits $\overline{OA'}$, $\overline{AB'}$ de ces deux quantités par une troisième w, on construira deux triangles semblables OAA', ABB'. En menant $A'C$ égal et parallèle à AB', OC sera la somme de ces produits. Or, on démontre facilement que le triangle OCB est semblable à chacun des deux précédents. Donc $\overline{OC}$ représente le produit de $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ par le même multiplicateur w.

Fig. 20.



On conclut de là que, si z, z' et w sont trois quantités complexes, on a

$$(z + z').w = z.w + z'.w.$$

Donc pour multiplier une somme de quantités complexes par une quantité complexe, on multipliera chaque partie de la somme par le multiplicateur.

De là découle l'extension aux quantités complexes de toutes les règles relatives à la multiplication et à la division des polynômes réels, ainsi que des formules pour les puissances entières des binômes et des polynômes.

En un mot, les règles pour la formation des fonctions rationnelles sont les mêmes pour les quantités complexes que pour les quantités réelles.

62. Considérons spécialement le cas des quantités représentées au moyen de leurs composantes rectangulaires

$$z = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}, \qquad z' = x'_0 + y'_{\frac{\pi}{2}},$$

et appliquons à la multiplication de ces quantités la règle de la multiplication des polynômes. On aura

$$\begin{aligned} zz' &= \left(x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}\right)\left(x'_0 + y'_{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= x_0 x'_0 + x_0 y'_{\frac{\pi}{2}} + y_{\frac{\pi}{2}} x'_0 + y_{\frac{\pi}{2}} y'_{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Lorsque les modules x, y, x', y', sont tous positifs, le produit devient évidemment

$$\begin{aligned} zz' &= (xx')_{0+0} + (xy')_{0+\frac{\pi}{2}} + (yx')_{\frac{\pi}{2}+0} + (yy')_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} \\ &= (xx')_0 + (xy')_{\frac{\pi}{2}} + (yx')_{\frac{\pi}{2}} + (yy')_{\pi}. \end{aligned}$$

ou, à cause de $(yy')_\pi = -(yy')_0$,

$$zz' = (xx' - yy')_0 + (xy' + yx')_{\frac{\pi}{2}}.$$

Si un module, x par exemple, était négatif et $= -\mathrm{x}$, on aurait

$$x_0 x'_0 = \mathrm{x}_\pi x'_0 = (\mathrm{x}x')_\pi = (-xx')_\pi = (xx')_0 ,$$

et de même pour les autres cas, de sorte que le résultat précédent est tout à fait général.

63. On peut arriver au même but d'une manière plus simple, en se servant d'une notation plus commode.

On a, d'après la règle de la multiplication,

$$r_p = r_0 \times 1_p ,$$

et cette formule subsiste encore, lors même que r est un module susceptible de signe. On a donc

$$r_p \times r'_{p'} = r_0 r'_0 \times 1_p \cdot 1_{p'} = rr' \cdot 1_{p+p'} .$$

On peut donc, dans la multiplication des quantités géométriques, mettre en facteur le produit des modules, et remplacer ensuite les modules par l'unité.

D'après cette remarque, écrivons la quantité complexe $x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}$ sous la forme

$$x \cdot 1_0 + y \cdot 1_{\frac{\pi}{2}} .$$

Remarquons maintenant que 1_0 est l'unité absolue, que l'on peut se dispenser d'écrire comme facteur. Désignons ensuite par la lettre i l'*unité imaginaire* $1_{\frac{\pi}{2}}$, ou celui des rayons du cercle de rayon 1, qui est mené perpendiculairement au diamètre horizontal. La quantité complexe se présentera alors sous la forme

$$x + iy .$$

En appliquant la règle de la multiplication aux deux binômes

$$x + iy , \qquad x' + iy' ,$$

on devra remarquer que l'on a

$$i^2 = \left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1_{2 \cdot \frac{\pi}{2}} = 1_\pi = -1 ,$$

et, par suite, on remplacera le carré de la quantité géométrique i par -1. La formule du numéro précédent deviendra alors

(1) $$(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx') ,$$

$xx' - yy'$ étant une quantité d'argument zéro, et le produit

$$i(xy' + yx') = (xy' + yx') \cdot 1_{\frac{\pi}{2}}$$

étant la même chose que $(xy' + yx')_{\frac{\pi}{2}}$.

D'après cela, les quantités complexes, mises sous la forme $x + iy$, pourront être traitées suivant les règles de calcul établies pour les quantités réelles, pourvu que l'on traite le symbole i comme une quantité dont le carré est -1.

Dans le binôme $x + iy$, la composante x porte le nom de *partie réelle;* la composante iy, celui de *partie imaginaire.*

Nous appliquerons toujours la dénomination d'*imaginaires pures* ou simplement d'*imaginaires* aux quantités de la forme iy, formées par la multiplication d'une quantité réelle et de l'*unité imaginaire.*

64. On déduit de là les moyens, indiqués dans les Traités d'Algèbre, pour ramener les produits, les quotients et les puissances entières de quantités complexes à la forme $u + iv$ de quantités complexes. On traitera i comme une quantité ayant pour carré

$$i^2 = -1,$$

et, par suite, pour puissances successives

$$\begin{aligned} i^3 &= -i \\ i^4 &= +1, \\ i^5 &= +i, \\ &\text{etc.}\dots, \end{aligned}$$

et en général, n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif,

$$\begin{aligned} i^{4n} &= +1, \\ i^{4n+1} &= +i, \\ i^{4n+2} &= -1, \\ i^{4n+3} &= -i. \end{aligned}$$

Remarquons en particulier que l'on a

$$\frac{1}{i} = -i.$$

65. *Théorème de Moivre.* — L'équation

$$(2) \qquad 1_p \cdot 1_q = 1_{p+q},$$

que nous avons établie comme cas particulier de la multiplication, contient, avec l'équation (1) du n° 63, toute la théorie des fonctions circulaires.

D'après ce que nous avons vu, les fonctions $\cos p$ et $\sin p$ ne sont autre chose que les composantes rectangulaires de la quantité géométrique 1_p. On a donc

$$(3) \qquad 1_p = \cos p + i \sin p.$$

En substituant cette valeur et les valeurs analogues de 1_q et de 1_{p+q} dans l'équation (2), et effectuant la multiplication d'après la règle exprimée par l'équation (1) du n° 63, il vient

$$(\cos p \cos q - \sin p \sin q) + i(\sin p \cos q + \cos p \sin q)$$
$$= \cos(p+q) + i \sin(p+q).$$

Les deux membres sont deux quantités géométriques dont l'égalité entraîne celles de leurs composantes de même nom. On a ainsi les équations fondamentales de la trigonométrie,

$$\cos(p+q) = \cos p \cos q - \sin p \sin q,$$
$$\sin(p+q) = \sin p \cos q + \cos p \sin q,$$

avec toutes leurs conséquences.

66. De l'équation (2) on tire, pour m entier quelconque,

$$(1_p)^m = 1_{mp},$$

ou, en mettant pour 1_p et pour 1_{mp} leurs valeurs tirées de la formule (3),

$$(\cos p + i \sin p)^m = \cos mp + i \sin mp.$$

On peut toujours supposer, dans cette égalité, l'exposant m positif, en donnant à p un signe convenable, ou, ce qui revient au même, en remplaçant i par $-i$. On développera alors le premier membre par la formule du binôme, et on le ramènera à la forme

$$U + iV.$$

U sera la valeur de $\cos mp$, V celle de $\sin mp$, développées suivant les puissances et les produits de $\cos p$ et de $\sin p$..

Nous n'insisterons pas ici sur les autres conséquences de la formule (2).

§ IV.

Puissances fractionnaires des quantités géométriques. — Équation binôme.

67. Considérons maintenant l'opération inverse de l'élévation aux puissances, l'extraction des racines.

La racine $m^{\text{ième}}$ de r_p est définie par l'équation

$$w^m = r_p$$

Or, si l'on prend une quantité géométrique ayant pour module $r^{\frac{1}{m}}$ et pour argument $\frac{p}{m}$, il résulte de ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, que la puissance $m^{\text{ième}}$ de cette quantité sera r_p. On aura donc

$$\sqrt[m]{r_p} = (r_p)^{\frac{1}{m}} = (r^{\frac{1}{m}})_{\frac{p}{m}}.$$

68. Nous avons remarqué (art. 39) que si l'on donne, comme cela a lieu généralement, une quantité géométrique par sa position sur le plan ou par ses composantes rectangulaires, l'argument p n'est déterminé qu'à un multiple quelconque de 2π près, de sorte qu'on pourra toujours le représenter par

$$p + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier indéterminé, positif, nul ou négatif. Donc l'argument de $\sqrt[m]{r_p}$, ou plutôt de $\sqrt[m]{r_{p+2k\pi}}$, aura pour valeur un quelconque des angles compris dans la formule

$$\frac{p}{m} + \frac{2k\pi}{m},$$

tandis que le module de cette racine aura une valeur arithmétique $r^{\frac{1}{m}}$ parfaitement déterminée.

Les directions distinctes qui répondront aux diverses déterminations de $\sqrt[m]{r_p}$, s'obtiendront en donnant à k les m valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-1.$$

Les directions qui correspondent à des valeurs de k différant entre elles d'un multiple de m, se confondront ensemble.

69. On peut représenter d'une manière très simple la multiplicité de valeurs d'une puissance fractionnaire d'une quantité géométrique.

Sur le cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine, élevons un cylindre de révolution, et traçons sur ce cylindre une hélice d'un pas quelconque, que nous pourrons supposer infiniment petit. Prenons cette hélice pour directrice d'un hélicoïde gauche, ayant pour axe l'axe du cylindre, et dont nous pourrons supposer les génératrices terminées toutes à cet axe (*).

En prenant pour unité d'arc d'hélice l'arc qui a pour projection l'unité d'arc de cercle, la spire de l'hélice ayant ainsi pour mesure le nombre 2π, nous pourrons représenter la quantité géométrique r_p par une génératrice de l'hélicoïde ayant pour longueur r, et interceptant, à partir de l'origine des arcs d'hélice (que nous supposerons coïncider avec l'origine des arcs de cercle), un arc égal à p. Si l'on imagine le pas de l'hélice infiniment petit, les diverses nappes de l'hélicoïde viendront coïncider avec le plan horizontal, qui se trouvera ainsi composé d'une infinité de nappes superposées.

Une quantité géométrique donnée par un point du plan horizontal sera représentée sur l'hélicoïde par un quelconque des points de cette surface situés sur la verticale du point donné. Les rayons vecteurs ou les modules de tous ces points seront égaux au module de la projection. Mais les arguments, mesurés par les arcs d'hélice interceptés par les rayons vecteurs à partir de l'origine commune, seront égaux à l'un quelconque d'entre eux, à celui, par exemple, qui a même valeur numérique p que l'argument de la projection, plus ou moins un nombre entier quelconque de spires de l'hélice. Ces arguments sont donc représentés par la formule

$$p + 2k\pi,$$

l'entier k pouvant prendre toutes les valeurs $\gtreqless 0$. Ainsi, les

(*) On supposerait les génératrices prolongées dans les deux sens à partir de l'axe, si l'on voulait introduire la considération des modules négatifs.

quantités géométriques de même projection r_p auront pour formule générale

$$r_{p+2k\pi}\,.$$

70. Si l'on élève $r_{p+2k\pi}$ à une puissance quelconque m, cette puissance aura pour expression

$$(r^m)_{mp+2km\pi}\,,$$

et le module r^m de cette puissance sera, dans tous les cas, une quantité arithmétique déterminée.

Si l'exposant m est entier, les différentes valeurs de l'argument

$$mp+2km\pi$$

différeront entre elles de multiples exacts de 2π. Elles correspondront donc à des directions dont les projections se confondront; de sorte que toutes les valeurs de

$$\left(r_{p+2k\pi}\right)^m$$

seront des quantités géométriques égales, les points de l'hélicoïde qui les représentent étant tous situés sur une même verticale.

Lorsque, au lieu de l'entier m, on prend pour exposant une fraction $\frac{m}{n}$, m et n étant des entiers premiers entre eux, les restes de la division km par n seront, dans un ordre quelconque, les n nombres

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots,\ n-1\,,$$

lorsqu'on donnera à k toutes les valeurs possibles. Donc les valeurs de l'argument

$$\frac{m}{n}p+2k\frac{m}{n}\pi$$

seront de la forme

$$\frac{m}{n}p+\frac{2\mu\pi}{n}+2k\pi\,,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif, et μ un des n nombres

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots,\ n-1\,.$$

En faisant abstraction du terme $2k\pi$, on voit que les valeurs de l'argument correspondent à n directions distinctes, partageant

la circonférence de base en n parties égales. Donc les points de l'hélicoïde qui représenteront les diverses valeurs de

$$\left(r_{p+2k\pi}\right)^{\frac{m}{n}}$$

se trouveront sur n verticales différentes, distribuées régulièrement sur la surface d'un cylindre de rayon $r^{\frac{m}{n}}$, et elles auront n projections distinctes, qui diviseront en n parties égales la circonférence de base de ce cylindre.

Donc, tant que l'argument p n'est connu qu'à un multiple de 2π près, la puissance fractionnaire $\left(r_p\right)^{\frac{m}{n}}$ aura n valeurs distinctes, de même module, mais d'arguments différents. En d'autres termes, l'équation

$$z^n = (a+ib)^m$$

a n racines distinctes, lorsque m et n sont premiers entre eux, et en particulier lorsque $m = 1$ (*).

(*) Si m n'est pas premier avec n, remplaçons m et n par λm, λn. L'équation deviendra

$$z^{\lambda n} = (a+ib)^{\lambda m}.$$

Si l'on met $(a+ib)^{\lambda m}$ sous la forme

$$\left(\rho^{\lambda m}\right)_{\lambda m(\varphi+2k\pi)},$$

on aura, sans ambiguïté,

$$z^n = \left(\rho^m\right)_{m(\varphi+2k\pi)},$$

m et n étant premiers entre eux. Il y aura donc n solutions.

Mais, si l'on écrivait

$$(a+ib)^{\lambda m} = \left(\rho^{\lambda m}\right)_{\lambda m\varphi+2k\pi},$$

l'argument de z serait

$$\frac{m}{n}\varphi + \frac{2k}{\lambda n}\pi,$$

le résidu de $\frac{k}{\lambda n}$ étant susceptible de λn valeurs, tandis que celui de $\frac{\lambda mk}{\lambda n}$ n'en avait que n.

On aura donc n ou λn solutions, suivant que l'on supposera donnée la valeur de $a+ib$ ou celle de $(a+ib)^{\lambda n}$.

71. Examinons spécialement le cas de la racine carrée. On voit que, si $\overline{OA} = r_p$ ou $r_{p+2k\pi}$, on obtiendra la valeur de la racine carrée de $\overline{OA}$, ou la valeur de $(r^{\frac{1}{2}})_{\frac{p}{2}+k\pi}$, en construisant une moyenne proportionnelle OB entre les longueurs O1 et OA, et portant OB sur la bissectrice de l'angle AOx ou sur son prolongement OB', suivant que k sera pair ou impair.

Fig. 21.

72. Si l'on propose, en particulier, d'extraire la racine carrée d'une quantité négative

$$-r = r_{\pi+2k\pi},$$

on pourra d'abord faire abstraction du module, puisque l'on a, en général,

$$(r_p)^m = r^m . (1_p)^m,$$

et qu'ainsi il suffit, dans tous les cas, d'opérer sur 1_p, et de multiplier le résultat par la valeur arithmétique de la puissance du module.

Or, on a

$$(1_{\pi+2k\pi})^{\frac{1}{2}} = 1_{\frac{\pi}{2}+k\pi} = \pm 1_{\frac{\pi}{2}},$$

selon que k est pair ou impair, en posant donc, comme nous l'avons déjà fait (art. 63),

$$1_{\frac{\pi}{2}} = i,$$

la valeur générale de la racine carrée de $-1 = 1_{(2k+1)\pi}$ sera $\pm i$. Donc

$$\sqrt{-r} = \pm i\sqrt{r}.$$

73. Supposons enfin que l'on fasse tendre $\frac{m}{n}$ vers un nombre incommensurable α. Le module de $(r_p)^{\frac{m}{n}}$ tendra vers une limite déterminée r^α. Mais les n points du cercle, qui déterminent les n valeurs de l'argument, deviendront infiniment nombreux et infiniment rapprochés, de sorte qu'il y aura toujours une des valeurs de

l'argument qui aura pour limite un angle quelconque choisi arbitrairement.

Donc si, comme c'est le cas ordinaire, r_p n'est donné que par sa projection sur le plan, et non par sa position même sur l'hélicoïde, c'est-à-dire si l'on ne connaît l'argument de r_p qu'à un multiple de 2π près, une puissance incommensurable de r_p aura bien un module déterminé r^α, mais l'argument de cette puissance sera absolument indéterminé; de sorte que $(r_p)^\alpha$ sera représenté par un point quelconque du cercle de rayon r^α. En d'autres termes, si l'on pose

$$x + iy = (a + ib)^\alpha,$$

x et y pourront prendre toutes les valeurs pour lesquelles on aura

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^\alpha.$$

On ne pourra donc faire usage de la fonction $(r_p)^\alpha$, pour α incommensurable, que lorsqu'on pourra se contenter de connaître les limites entre lesquelles cette quantité est renfermée, ce qui arrivera, par exemple, si r est infiniment petit.

§ V.

Des équations algébriques.

74. D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, une équation binôme, qui, en quantités réelles, pouvait avoir au plus deux racines, quelquefois une seule ou même aucune, aura maintenant dans tous les cas, par l'introduction des quantités géométriques et la généralisation des opérations, autant de racines distinctes qu'il y a d'unités dans son degré, quel que soit ce degré.

On peut conclure de là que toute équation algébrique résoluble par radicaux, c'est-à-dire pouvant se ramener à la résolution des équations binômes, sera toujours susceptible d'une solution en quantités complexes, d'où l'on conclut, par le raisonnement connu, qu'elle admettra toujours un nombre de racines égal à son degré. Tel est, en particulier, le cas des équations des quatre premiers degrés.

Mais cette propriété s'étend aussi à toute équation algébrique d'un degré quelconque. On sait que, pour le démontrer, il suffit de faire voir que toute équation algébrique, à coefficients réels ou

complexes, admet au moins une racine complexe, de la forme r^p ou $x+iy$. Nous allons reproduire ici la démonstration de ce théorème donnée par Legendre, en la présentant à peu près sous la même forme qu'Argand (art. 12).

75. Soit

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$$

un polynôme entier et rationnel de degré m, dont les coefficients a_0, a_1, ..., a_m sont des quantités quelconques, réelles ou complexes. Pour chaque valeur de la variable

$$z = r_p = x + iy,$$

on pourra construire les divers termes du polynôme; en les ajoutant, on obtiendra un polygone, généralement ouvert, et le côté R_P qui fermera ce polygone, sera la valeur du polynôme $f(z)$.

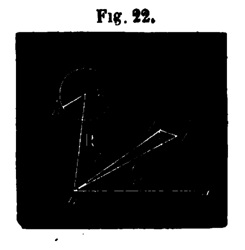
Nous allons démontrer que, pour une valeur de z convenablement choisie, le polygone se ferme de lui-même, et que l'on a alors $R = 0$ ou $f(z) = 0$.

Remarquons d'abord que, pour une valeur infiniment grande du module de z, le module du premier terme $a_0 z^m$, c'est-à-dire $r^m \times \text{mod}.a_0$, finira par surpasser autant que l'on voudra le module de la somme des autres termes, et, par suite, l'extrémité finale du polygone s'éloignera autant que l'on voudra de l'origine.

Il est évident, d'un autre côté, que, parmi les positions, en nombre infini, que peut prendre z dans toute l'étendue du plan, il y en a une qui donne pour le module R de $f(z)$ une valeur minimum, et, d'après la remarque précédente, ce module minimum ne peut correspondre qu'à une valeur finie du module de z. Il faut prouver maintenant que cette valeur minimum de R ne peut être autre que zéro.

76. Soit, s'il est possible, $w = R_P$ la valeur de $f(z)$, de module minimum, ce module étant différent de zéro, et soit z la valeur correspondante de la variable. Donnons à z un accroissement infiniment petit

Fig. 22.



$$dz = \rho_\varphi ,$$

et voyons quelle sera la forme de l'accroissement correspondant du polynôme $f(z)$

Le terme $a_0 z^m$ devient

$$a_0(z + dz)^m = a_0\left(z^m + mz^{m-1}dz + \varkappa dz^2\right),$$

$\varkappa$ désignant, abstraction faite de sa valeur numérique, une quantité qui ne devient pas infinie pour $dz = 0$. L'accroissement du terme en question sera donc

$$d.a_0 z^m = ma_0 z^{m-1}dz + \varkappa dz^2.$$

En calculant de même les accroissements des autres termes, et faisant la somme, on obtiendra, pour l'accroissement de $f(z)$, une expression de la forme

$$\left[ma_0 z^{m-1} + (m-1)\,a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\right]dz + \varkappa dz^2,$$

où le coefficient de dz n'est autre chose que la dérivée de $f(z)$. Donc

$$d.f(z) = f'(z)\,dz + \varkappa dz^2.$$

Supposons d'abord que $f'(z)$ ne soit pas nul, et soit

$$f'(z) = \mathrm{R}'_{\mathrm{P}'}.$$

La valeur de $d.f(z)$ pourra s'écrire

$$d.f(z) = (\mathrm{R}'\rho)_{\mathrm{P}'+\varphi} + \varkappa(\rho^2)_{2\varphi},$$

expression qui, pour ρ infiniment petit, *différera infiniment peu* de son premier terme. Donc, en supposant que l'on fasse décrire au point $z + dz$ un cercle de rayon infiniment petit ρ autour du point z, le module de $df(z)$ différera infiniment peu de $\mathrm{R}'\rho$, et son argument différera infiniment peu de $\mathrm{P}' + \varphi$. Donc le point $w' = f(z+dz)$ décrira autour de w une courbe infiniment peu différente d'un cercle, et dont le rayon vecteur fera, avec le rayon vecteur du cercle décrit autour de z, un angle presque constant et infiniment peu différent de P'.

Lors donc que l'on fera parcourir à $z + dz$ le cercle complet autour de z, la fonction $f(z + dz)$ devant, au bout de cette révolution, reprendre sa valeur primitive, décrira complètement la courbe fermée autour de w, et rencontrera par conséquent le rayon vecteur $\mathrm{O}w$ quelque part entre O et w, si l'on a pris ρ assez petit pour avoir $\mathrm{R}'\rho < \mathrm{R}$, ce qui est toujours possible, tant que R n'est pas nul. Mais alors, pour la valeur de φ qui répond à cette

rencontre, le module de $f(z+dz)$ est moindre que celui de $f(z)$. Donc le module de $f(z)$ n'était pas un minimum, comme on l'avait d'abord supposé.

Nous avons admis, dans cette démonstration, que $f'(z)$ n'était pas nul. Si l'on avait $f'(z)=0$, on pousserait le développement plus loin, et, en désignant par

$$\frac{f^{(n)}(z)}{1.2\ldots n} = R'_{P'}$$

le coefficient de la puissance la moins élevée de dz qui ne disparaisse pas, on aurait

$$df(z) = \frac{f^{(n)}(z)}{1.2\ldots n}dz^n + \varkappa dz^{n+1} = (R'\rho^n)_{P'+n\varphi} + \varkappa(\rho^{n+1})_{(n+1)\varphi},$$

expression qui diffère infiniment peu de son premier terme. On verrait de même que si $z+dz$ fait le tour de z sur un cercle infiniment petit, ou seulement la $n^{\text{ième}}$ partie de ce tour, $f(z+dz)$ fera le tour complet de w, et l'on en conclura de la même manière que le module de $f(z)$ ne peut pas être un minimum, s'il est différent de zéro.

Donc puisque ce minimum existe, et qu'il ne peut pas être différent de zéro, il est nécessairement égal à zéro. Donc l'équation

$$f(z) = 0$$

a au moins une racine de la forme r_p ou $x+iy$, d'où l'on conclut ensuite qu'elle en a non-seulement une, mais m, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans son degré.

Ce théorème démontré, on peut établir alors d'une manière générale toutes les propriétés fondamentales des équations algébriques.

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES D'UNE VARIABLE COMPLEXE, ET DE LEURS FONCTIONS INVERSES.

§ Ier.

Des exponentielles à exposant complexe.

77. De l'équation

$$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q}$$

il résulte que la fonction 1_p jouit de la propriété générale exprimée par l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad \varphi(p)\cdot\varphi(q) = \varphi(p+q),$$

laquelle caractérise, comme on sait, les exponentielles réelles. On est donc conduit à rapprocher la fonction 1_p des exponentielles.

Or, si l'on développe en série l'expression

$$1_p = \cos p + i \sin p,$$

il vient

$$1_p = 1 + \frac{ip}{1} - \frac{p^2}{2!} - \frac{ip^3}{3!} + \frac{p^4}{4!} + \dots,$$

ce que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$1_p = 1 + \frac{ip}{1} + \frac{(ip)^2}{2!} + \frac{(ip)^3}{3!} + \frac{(ip)^4}{4!} + \dots.$$

Le second membre de cette égalité n'est autre chose que ce que devient le développement de l'exponentielle

$$(2) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

lorsqu'on y remplace x par ip.

Si donc on prend cette série, qui est toujours convergente, pour définition de l'exponentielle e^x, la même définition, appliquée au cas où l'on remplace x par ip, donnera pour résultat 1_p. Il sera donc naturel de désigner cette quantité 1_p par le symbole e^{ip}, de sorte que l'extension de la définition de l'exponentielle par la série, pour le cas de l'exposant imaginaire, s'obtiendra en posant

$$e^{ip} = 1_p.$$

Cette exponentielle imaginaire ainsi définie satisfaisant, comme l'exponentielle réelle, à l'équation caractéristique (1), sur laquelle est fondé tout le calcul des exponentielles, il s'ensuit de là que le calcul des exponentielles imaginaires se fera par les mêmes règles que celui des exponentielles réelles.

Remarquons en particulier les équations suivantes, qui résultent de cette définition :

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = +1 ,$$

k étant un nombre entier quelconque; et de même

$$e^{\pi i} = e^{(2k+1)\pi i} = -1 ,$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i} = +i ,$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i} = -i .$$

78. Si, dans l'équation de définition (2), on remplace x successivement par deux quantités quelconques u et v, on prouve réciproquement, par des identités algébriques, qu'il résulte de cette définition l'égalité

$$e^u . e^v = e^{u+v},$$

c'est-à-dire que toutes les fois que l'on prend l'équation (2) pour définition de l'exponentielle à exposant quelconque, réel, imaginaire ou complexe, cette exponentielle satisfait toujours à l'équation fonctionnelle (1).

Donc les règles du calcul des exponentielles, définies par l'équation (2), subsisteront, quelle que soit la nature de l'exposant, et l'on aura, pour des valeurs quelconques de u et de v,

$$e^u . e^v = e^{u+v} ,$$

$$\frac{e^u}{e^v} = e^{u-v} ,$$

$$(e^u)^m = e^{mu} ,$$

m étant une quantité réelle quelconque.

Si l'on remplace m par une quantité complexe quelconque v, nous prendrons pour définition de la puissance $(e^u)^v$ l'équation

$$(e^u)^v = e^{uv} = (e^v)^u ,$$

qui est une extension de la formule établie pour les exposants réels.

79. Nous pouvons maintenant remplacer la notation provisoire, que nous avions employée jusqu'ici pour représenter les quantités géométriques, par une notation plus commode et plus expressive. On a, d'après ce qu'on vient de voir,

$$r_p = r \,.\, 1_p = re^{ip} \,.$$

C'est sous cette dernière forme que nous représenterons désormais les quantités géométriques dont la multiplication et l'élévation aux puissances rentreront dès lors complètement dans les règles générales de l'algèbre des quantités réelles.

80. Étudions maintenant les propriétés de la fonction exponentielle e^z, dont l'exposant z est une quantité complexe, de la forme $x + iy$.

On a (art. 78)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \,,$$

d'où l'on voit que cette expression se présente elle-même sous la forme complexe, e^x étant le module, et y l'argument.

On a, de plus (art. 77),

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \,.\, e^{2k\pi i} = e^z \,.\, 1 = e^z \,.$$

Donc l'exponentielle e^z ne change pas de valeur, lorsqu'on augmente la variable z d'un multiple quelconque de la quantité imaginaire $2\pi i$; de sorte que, si l'on fait varier z de manière à le faire croître de $2\pi i$ ou d'un multiple de $2\pi i$, la fonction e^z reprendra sa valeur primitive. On dit pour cette raison que e^z est une fonction *périodique* de z, dont l'*indice de périodicité* ou la *période* est $2\pi i$.

Fig. 23.



Représentons géométriquement cette périodicité. Soit $z = x + iy$ un point du plan, y étant d'abord supposé positif et moindre que 2π. Si l'on mène par ce point une parallèle à l'axe des y, et que, de part et d'autre de z, on porte sur cette parallèle, à la suite les unes des autres, des longueurs égales à 2π, on obtiendra une suite indéfinie de points

$$\ldots,\, z_{-2},\, z_{-1},\, z,\, z_1,\, z_2,\, \ldots,$$

pour lesquels la fonction e^z aura la même valeur.

Réciproquement, il est aisé de voir que ces points sont les seuls pour lesquels e^z ait la valeur considérée.

Si, de part et d'autre de l'origine O, on porte de même sur l'axe des y, à la suite les unes des autres, des longueurs égales à 2π, et que, par les points de division, on mène des parallèles à Ox, ces parallèles partageront le plan en bandes horizontales, de hauteur 2π, et de longueur infinie dans les deux sens, et dont chacune comprendra évidemment un des points

$$\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z, z_1, z_2, \ldots,$$

et un seul. Ces points seront placés de la même manière dans leurs bandes respectives, de sorte que deux de ces points viendront coïncider l'un avec l'autre, si l'on fait glisser l'une des bandes le long de l'axe des y, jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur l'autre.

Il résulte de là que, dans chacune de ces bandes, la fonction e^z parcourt la serie complète de ses valeurs, et qu'elle y prend chaque valeur une seule fois.

Si l'on fait décrire à z une courbe quelconque dans une des bandes, ce qui donnera une certaine série de valeurs de e^z, on obtiendra la même série de valeurs en faisant décrire à z une courbe égale située de la même manière par rapport à une autre bande quelconque.

81. On verrait absolument de la même manière que la fonction

$$e^{iz}$$

est également périodique, sa période étant la quantité réelle 2π.

On représenterait géométriquement la périodicité comme nous venons de le faire, avec cette seule différence, que les bandes, au lieu d'être parallèles à l'axe des x, seraient parallèles à l'axe des y.

§ II.

Des fonctions circulaires.

82. Des équations

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p,$$
$$e^{-ip} = \cos p - i \sin p,$$

on tire

$$\cos p = \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2},$$

$$\sin p = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i}.$$

Nous prendrons ces équations, établies pour le cas de p réel, pour définitions des fonctions *cosinus* et *sinus,* dans le cas où l'on remplacera p par une variable complexe z. Nous poserons ainsi, quel que soit z

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si l'on remplace z par $x + iy$, ces valeurs deviendront

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{Ch} y - i \sin x \operatorname{Sh} y ,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y ,$$

$\operatorname{Ch} y$ et $\operatorname{Sh} y$ représentant les *fonctions hyperboliques*

$$\operatorname{Ch} y = \cos iy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2},$$

$$\operatorname{Sh} y = \frac{1}{i} \sin iy = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}.$$

Ainsi $\cos z$ et $\sin z$ se ramènent à la forme complexe, lorsque z est une quantité complexe.

83. Les exponentielles e^{iz}, e^{-iz} dont les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont formées par addition et soustraction, ayant l'une et l'autre pour période 2π, ces fonctions elles-mêmes auront aussi pour période 2π, de sorte que l'on aura, k étant un entier quelconque,

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z ,$$
$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z .$$

Si l'on partage le plan en bandes verticales de largeur 2π, les deux fonctions $\cos z$ et $\sin z$ prendront, dans chacune de ces bandes, la totalité de leurs valeurs.

Mais on ne pourra plus dire, comme pour l'exponentielle, que

ces fonctions ne prennent la même valeur qu'une seule fois dans chaque bande. Considérons, en effet, la fonction

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Il est clair qu'elle ne change pas de valeur lorsqu'on remplace z par $-z$. On a donc

$$\cos(-z) = \cos z,$$

et, plus généralement,

$$\cos(-z + 2k\pi) = \cos(z + 2k'\pi),$$

quels que soient les entiers k et k'. De là résulte que $\cos z$ reprend la même valeur non-seulement pour les points

Fig. 21.



$$\ldots, z_{-1}, z, z_1, \ldots$$

situés dans chaque bande sur une même parellèle à Ox, mais encore pour les points

$$\ldots, z'_1, z', z'_{-1}, \ldots$$

disposés symétriquement aux premiers par rapport à l'origine O, et formant une seconde série de points équidistants, rangés sur une autre parallèle à Ox.

Donc la fonction $\cos z$ passe, dans chaque bande, deux fois par la même valeur, et il est aisé de voir que les deux points d'une même bande auxquels répondent deux valeurs égales sont placés symétriquement par rapport aux points

$$\ldots, \pi_{-1}, \pi, \pi_1, \ldots,$$

qui occupent sur l'axe des x le milieu de chaque bande.

Si donc on fait décrire à z une courbe quelconque, la série des valeurs de $\cos z$ correspondante aux divers points de cette courbe se reproduira non-seulement pour les courbes égales, disposées de la même manière par rapport aux autres bandes, mais encore pour les courbes symétriques de celles-là par rapport aux points π, *centres* de ces bandes.

84. On pourrait discuter de même directement la fonction $\sin z$.

Mais on peut aussi ramener immédiatement sa discussion à celle de cos z. En effet, on a

$$\frac{1}{i}=\frac{1}{1^{\frac{\pi}{2}}}=e^{-\frac{\pi i}{2}},$$

d'où

$$\sin z=\frac{1}{2}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})}-e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})}+e^{i\pi}.e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})}+e^{-i(z-\frac{\pi}{2})}\right)$$

$$=\cos(z-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-z).$$

On aura donc, non-seulement

$$\sin z=\cos(z-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=\sin(z+2k\pi),$$

mais encore

$$\sin z=\cos(-z+\frac{\pi}{2})=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(z-\frac{\pi}{2})\right]=\sin(\pi-z),$$

d'où l'on conclura que la fonction sin z prend, dans chaque bande, la totalité de ses valeurs, et chaque valeur deux fois dans la même bande.

85. La fonction

$$\operatorname{tang} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},$$

pouvant se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang} z=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1},$$

est liée à e^{2iz} par une équation du premier degré, et aura la même période que cette exponentielle, c'est-à-dire la période π, de sorte qu'on aura, quel que soit l'entier k,

$$\operatorname{tang}(z+k\pi)=\operatorname{tang} z.$$

Si l'on partage le plan en bandes verticales de largeur π, tang z prendra dans chaque bande la totalité de ses valeurs, et chaque valeur une seule fois.

86. Ce que nous venons de dire des fonctions circulaires, s'appliquerait aux fonctions hyperboliques

$$\mathrm{Ch}\, z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{Sh}\, z = \frac{1}{i} \sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{Th}\, z = \frac{1}{i} \operatorname{tang} iz = \frac{\mathrm{Sh}\, z}{\mathrm{Ch}\, z},$$

au seul changement près des bandes verticales en bandes horizontales, et de l'indice de périodicité 2π en $2\pi i$.

§ III.

Des logarithmes.

87. Nous avons vu que la fonction e^z, dans chacune des bandes horizontales de largeur 2π dans lesquelles on divise le plan, prend la série complète de ses valeurs, et prend chaque valeur une seule fois.

Réciproquement, étant donnée *a priori* une valeur quelconque de la fonction e^z, il est facile de voir que l'on pourra toujours assigner à z une valeur qui fasse prendre à e^z la valeur donnée, et de cette valeur de z on en déduira une infinité d'autres, situées chacune dans chaque bande de largeur 2π.

Posons, en effet,

(1) $$e^z = w = u + iv,$$

$w = u + iv$ étant la valeur donnée, et cherchons à déterminer pour z une valeur de la forme $x + iy$. En identifiant

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

avec $u + iv$, il vient

$$e^x \cos y = u,$$

$$e^x \sin y = v,$$

d'où (art. 48, *remarque*)

$$x = \log\sqrt{u^2+v^2},$$
$$y = \text{arc tang}\,\frac{v}{u}\cdot$$

Si l'on observe que les arcs qui ont pour tangente $\frac{v}{u}$, et dont le sinus et le cosinus ont respectivement les signes de v et de u, ont une infinité de valeurs, différant entre elles par un multiple quelconque de 2π, et que l'on représente par arc tang $\frac{v}{u}$ l'une d'entre elles, la plus petite valeur positive, par exemple, la valeur générale de y sera alors

$$y = \text{arc tang}\,\frac{v}{u} + 2k\pi\,.$$

En appelant donc *logarithme* de $w = u + iv$ la fonction z inverse de l'exponentielle, et définie par l'équation (1), on aura

$$(2)\qquad \log(u+iv) = \log\sqrt{u^2+v^2} + i\,\text{arc tang}\,\frac{v}{u} + 2k\pi i\,,$$

les fonctions logarithme et arc tangente du second membre étant prises dans leur sens arithmétique et restreint, tandis que la fonction logarithme du premier membre est prise dans le sens le plus général, au point de vue des quantités complexes.

Lorsqu'il est utile de distinguer par la notation le sens généralisé des fonctions de quantités complexes, on le fait, en les entourant, à l'exemple de Cauchy, de doubles parenthèses, et en écrivant le premier membre de l'équation précédente sous la forme

$$\log((u+iv))\,.$$

88. Si la valeur de l'exponentielle e^z était donnée sous la forme r_p ou re^{ip}, on aurait de même

$$(3)\qquad \log(re^{ip}) = \log r + ip + 2k\pi i\,,$$

d'où l'on pourrait déduire immédiatement la formule (2).

En particulier, si w est une quantité réelle et positive, alors $p = 0$, $r_p = r$, et l'on a

$$\log((r)) = \log r + 2k\pi i\,.$$

Ainsi, parmi les valeurs en nombre infini de $\log((r))$, une seule est réelle : c'est la valeur arithmétique.

Si w est une quantité négative, $p = \pi$, d'où

$$\log((-r)) = \log r + (2k+1)\pi i \,.\,.$$

89. D'après cela, les valeurs représentées par les formules (2) ou (3) ont toutes même partie réelle, et sont disposées dans chaque bande sur une même parallèle à l'axe des y, comme les diverses valeurs de z dans la *fig. 23* (p. 52).

On voit que la fonction inverse d'une fonction périodique est une fonction *multiforme*, susceptible, pour chaque valeur de la variable, d'une infinité de déterminations, qui diffèrent entre elles par des multiples d'un même intervalle constant.

§ IV.

Fonctions circulaires inverses.

90. Considérons d'abord la fonction inverse du cosinus, c'est-à-dire la valeur de $z = \text{arc}\cos w$, déterminée par la formule

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = u + iv = w \,.$$

On tire de cette équation

$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0 \,,$$

d'où

$$e^{iz} = w + \sqrt{(w+1)(w-1)} \,,$$

$$z = \frac{1}{i} \log\left[w + \sqrt{(w+1)(w-1)}\right] .$$

Si l'on pose

$$w + 1 = \rho' e^{i\varphi'} \quad , \quad w - 1 = \rho'' e^{i\varphi''} \quad ,$$

$$\sqrt{\rho'\rho''} = \rho \quad , \quad \frac{\varphi' + \varphi''}{2} = \varphi \quad ,$$

d'où

$$\sqrt{w^2 - 1} = \rho e^{i\varphi} = s + it \,,$$

la valeur de z prendra la forme

$$z = \frac{1}{i} \log\left[u + s + i(v+t)\right],$$

et nous avons vu comment cette valeur peut se ramener à la forme complexe.

Remarquons d'abord que, les angles φ', φ'' pouvant être remplacés par $\varphi' + 2k'\pi$, $\varphi'' + 2k''\pi$, φ pourra l'être par

$$\varphi + (k' + k'')\pi, \qquad \text{ou simplement} \qquad \varphi + k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque. On a ainsi, pour le radical

$$\sqrt{w^2 - 1} = \rho e^{i(\varphi + k\pi)},$$

deux valeurs égales et de signe contraire, suivant que k est pair ou impair. Donc z est susceptible de deux séries de valeurs, que l'on peut représenter par

$$z' = \frac{1}{i} \log((w + \sqrt{w^2 - 1})),$$

$$z'' = \frac{1}{i} \log((w - \sqrt{w^2 - 1})).$$

Les deux quantités $w + \sqrt{w^2 - 1}$, $w - \sqrt{w^2 - 1}$ ayant pour produit l'unité, leurs logarithmes seront égaux et de signes contraires, et il en sera de même pour les valeurs z', z''.

Donc enfin la valeur générale de $z = \operatorname{arc\,cos}((u + iv))$ pourra se mettre sous la forme (art. 48, *rem.*)

$$\operatorname{arc\,cos}((u + iv))$$
$$= \pm \left\{ \operatorname{arc\,tang} \frac{v + t}{u + s} + \frac{1}{i} \log \sqrt{(u + s)^2 + (v + t)^2} \right\} + 2k\pi,$$

en posant

$$\rho = \sqrt[4]{[(u + 1)^2 + v^2][(u - 1)^2 + v^2]},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2uv}{u^2 - v^2 - 1},$$

$$s + it = \rho e^{i\varphi}.$$

On voit que les différentes valeurs de z sont distribuées sur le plan, comme l'indique la *fig. 24* (p. 55).

On obtiendrait de même la valeur de

$$\operatorname{arc\,sin} w = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} w.$$

91. Passons maintenant à la fonction inverse de la tangente,

$$z = \operatorname{arc\,tang} w,$$

déterminée par la formule

$$w = \operatorname{tang} z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \cdot$$

On a, d'après cette équation de définition,

$$e^{2iz} = \frac{1 + iw}{1 - iw},$$

$$z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iw}{1 - iw} \cdot$$

En faisant $w = re^{ip}$, on a, d'après le paragraphe précédent,

$$z = \operatorname{arc\,tang}(re^{ip}) = \frac{1}{2i}\left[\log(1 + ire^{ip}) - \log(1 - ire^{ip})\right]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2r\cos p}{1 - r^2} + \frac{i}{4} \log \frac{1 + 2r\sin p + r^2}{1 - 2r\sin p + r^2} + k\pi,$$

ou, sous une autre forme,

$$\operatorname{arc\,tang}(u + iv)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2u}{1 - u^2 - v^2} + \frac{i}{4} \log \frac{(1 + v)^2 + u^2}{(1 - v)^2 + u^2} + k\pi .$$

§ V.

Exponentielles et logarithmes à base complexe.

92. Jusqu'ici nous n'avons considéré que les exponentielles relatives à la base e, à laquelle se ramènent immédiatement les exponentielles relatives à une base réelle et positive quelconque a, puisque l'on a

$$a^z = e^{z \log a},$$

$\log a$ désignant le logarithme arithmétique du nombre positif a.

Voyons ce que donnent les règles de calcul établies jusqu'ici, lorsqu'on les applique au cas où a est remplacé par un nombre complexe de la forme $a + ib$, que nous pouvons toujours ramener (§ III) à la forme

$$e^{\lambda + i\mu}.$$

On a alors

$$(a + ib)^z = \left(e^{\lambda + i\mu}\right)^{x + iy} = e^{\lambda x - \mu y + i(\mu x + \lambda y)},$$

quantité qui se ramène encore à la forme complexe.

Si la base est donnée sous la forme $a+ib$, son argument μ n'étant connu qu'à un multiple de 2π près, la valeur générale de l'exponentielle sera en réalité

$$e^{\lambda x-(\mu+2k\pi)y} \cdot e^{i[(\mu+2k\pi)x+\lambda y]}.$$

Ici le module, comme l'argument, dépend de k, et l'un et l'autre sont susceptibles d'une infinité de valeurs, correspondantes à la fois à des distances et à des directions différentes.

Pour $y=0$, l'exposant étant réel, le module de l'exponentielle est déterminé; l'argument seul a une infinité de valeurs, tant que x n'a pas une valeur rationnelle. Dans ce cas l'exponentielle, comme nous l'avons déjà vu dans l'article 73, sera représentée par un point quelconque d'un cercle de rayon $e^{\lambda x}$.

Pour $x=0$, l'exposant étant imaginaire, l'argument sera déterminé; mais le module aura une infinité de valeurs en progression arithmétique, correspondante à des points en ligne droite.

Dans le cas général, on voit, en faisant varier k, que, pour des arguments croissant en progression arithmétique, on a des modules ou rayons vecteurs croissant en progression géométrique. Donc tous les points obtenus en donnant à k différentes valeurs sont situés sur une même spirale logarithmique, et les rayons vecteurs de deux points consécutifs font entre eux un angle constant (*).

On a donc ici affaire à une fonction multiforme, comme les logarithmes ou les arcs de cercle. Comme les points qui représentent les diverses valeurs sont séparés les uns des autres par des intervalles finis (sauf pour les valeurs infinies de k pour lesquelles ces points tendent vers l'origine, point asymptotique de la spirale), on pourra les séparer les uns des autres de manière à choisir celui qui convient à la question. Donc la fonction

$$(a+ib)^{x+iy},$$

dans le cas où y n'est pas nul, remplit les conditions nécessaires pour être admise en analyse.

93. Nous supposons ici l'exposant $x+iy$ complètement déterminé. Si l'on se contentait, comme on peut le faire dans le cas

(*) J. Warren, *On the geometrical representation of the powers*, etc., art. 42 et 50. (*Philos. Transact.*, 1829.)

d'une base réelle et positive, de donner l'exposant à un multiple de $2\pi i$ près, l'exponentielle deviendrait alors, en remplaçant y par $y + 2h\pi$,

$$e^{\lambda x-(\mu+2k\pi)(y+2h\pi)} \cdot e^{i[(\mu+2k\pi)x+\lambda(y+h\pi)]}$$

Les points qui représentent les valeurs de cette fonction sont alors distribués sur une infinité de spirales logarithmiques. Mais pour des distances de l'origine, finies et différentes de zéro, les points seraient encore séparés par des intervalles finis, et la fonction admissible.

94. Pour que la fonction

$$(a+ib)^z = e^{(\lambda+i\mu)z}$$

reprenne la même valeur, lorsqu'on changera z en $z+g$, il faut et il suffit que l'exposant de e croisse d'un multiple de $2\pi i$, c'est-à-dire que l'on ait, n étant entier

$$(\lambda+i\mu)g = 2n\pi i,$$

$$g = \frac{2n\pi i}{\lambda+i\mu} = \frac{2n\pi(\mu+i\lambda)}{\lambda^2+\mu^2}.$$

Donc la fonction $(a+ib)^z$ est périodique comme dans le cas d'une base réelle, et sa période est la quantité complexe

$$\frac{2\pi(\mu+i\lambda)}{\lambda^2+\mu^2}$$

Mais il faut remarquer que μ étant susceptible d'une infinité de valeurs de la forme $\mu+2k\pi$, la période n'est plus la même en passant d'une valeur à l'autre. Elle tend vers zéro pour $k = \pm\infty$. C'est ce qu'éclaircira encore l'article suivant.

95. Proposons-nous maintenant le problème inverse : trouver la fonction

$$z = \log w,$$

déterminée par l'équation

$$(a+ib)^z = w = u+iv,$$

ou, en exprimant $a+ib$ et $u+iv$ au moyen de leurs logarithmes,

$$e^{(\lambda+i\mu+2ik\pi)(x+iy)} = e^{s+it+2ih\pi}.$$

On en conclut, en identifiant les exposants,

$$(1) \qquad \lambda x - (\mu + 2k\pi)y = s ,$$

$$(2) \qquad (\mu + 2k\pi)x + \lambda y = t + 2h\pi .$$

En éliminant k entre ces deux équations, on en tire

$$(3) \qquad \lambda(x^2 + y^2) - sx - (t + 2h\pi)y = 0 .$$

Les points satisfaisant à la question sont situés à l'intersection des droites représentées par l'équation (1) avec les cercles représentés par l'équation (3). Toutes les droites (1), ainsi que tous les cercles (3), rencontrent l'axe des x au point A, dont l'abscisse est $x = \frac{s}{\lambda}$, et tous les cercles passent par l'origine.

Les droites (1) rencontrent une parallèle aux x en une série de points équidistants. Les centres des cercles (3) forment une autre série de points équidistants.

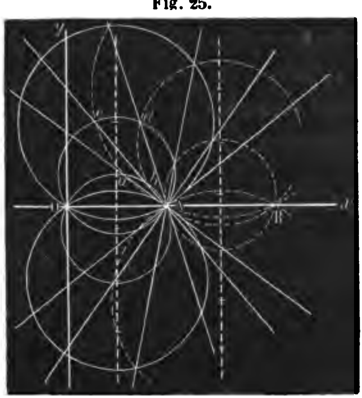
Pour $k = \pm\infty$, les points situés sur chaque cercle (3) convergent vers le point O.

Si l'on cherche le lieu des points pour lesquels la différence $h - k = g$ des indices est constante, on trouve, en éliminant k entre les équations (1) et (2), après y avoir remplacé h par $k + g$,

$$\lambda(x^2 + y^2) - (s + \lambda)x - (t - \mu + 2g\pi)y + s = 0 ,$$

équation d'une série de cercles passant au point A et au point de l'axe des x dont l'abscisse $= 1$, les centres étant distribués à intervalles égaux sur la droite $x = \frac{1}{2}\mathrm{OA} + \frac{1}{2}$.

Fig. 25.



Les deux systèmes de cercles dont les intersections déterminent les points z, partagent le plan en quadrilatères curvilignes tels que $abdc$, dont les points z forment les sommets.

Il est aisé de voir que, sur chaque droite (1), pour k constant, les points z sont distribués à des distances égales, ce qui correspond à la période de la fonction $(a + ib)^z$ dont il a été question dans l'article précédent. Cet intervalle change d'une droite à l'autre.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PAR J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences
de Bordeaux.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE DES FONCTIONS UNIFORMES.

(Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,*
t. VI, 2e cahier.)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNICUE, DU BUREAU
DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1868

1872, April 26.
Hazen Fund.

DEUXIÈME PARTIE.

Théorie des fonctions uniformes.

CHAPITRE Ier.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

§ Ier.

Caractère général d'une fonction d'une variable complexe.

96. Soit $f(z)$ une fonction continue, réelle ou complexe, d'une variable z; supposons que cette fonction soit définie, pour des valeurs *réelles* de cette variable, par une équation de la forme

$$f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

$f_1(z)$ et $f_2(z)$ étant des fonctions réelles pour les valeurs réelles de z.

Si dz représente un accroissement réel infiniment petit de la variable z, le rapport

$$\frac{f(z+dz)-f(z)}{dz}$$

aura pour limite une nouvelle fonction $f'(z)$ de z, qui sera généralement déterminée, et qui ne dépendra nullement du signe de l'accroissement dz, ni de la manière dont on aura fait converger cet accroissement vers zéro. Cette limite s'appelle, comme on sait, la *fonction dérivée* ou simplement la *dérivée* de $f(z)$.

L'existence de cette fonction dérivée se vérifie pour toutes les fonctions continues définies *a priori*. Elle sert à en définir une

infinité d'autres au moyen de l'intégration; et, pour toutes les fonctions inconnues que l'on considère en Analyse, on admet implicitement qu'elles jouissent de la propriété d'avoir une dérivée qui ne devient nulle ou infinie qu'un nombre limité de fois dans un intervalle fini quelconque.

Voyons à quelle condition les fonctions d'une variable complexe jouiront de cette propriété fondamentale.

97. Dans le cas où z est une variable réelle et dz un accroissement réel infiniment petit, on a

$$\frac{f(z+dz)-f(z)}{dz} = f'(z) + \varkappa\, dz,$$

$\varkappa$ étant une fonction, réelle ou complexe, de z et de dz, qui ne devient pas infinie pour $dz = 0$. Il en sera de même, lorsqu'on remplacera z par une valeur complexe

$$x + iy = re^{ip},$$

pourvu qu'on laisse dz réel, ou y constant.

Supposons maintenant qu'on fasse varier à la fois x et y, ou r et p, et soit

$$dz = dx + idy = \rho e^{i\varphi},$$

ρ étant infiniment petit, et φ ayant une valeur quelconque. Si l'on fait cette substitution dans l'équation précédente, le second membre deviendra

$$f'(z) + \varkappa . \rho e^{i\varphi},$$

la fonction $\varkappa$ de z et de $\rho e^{i\varphi}$ n'étant pas généralement infinie pour $\rho = 0$; et par suite la valeur de

$$\lim \frac{f(z+dz)-f(z)}{dz}$$

se réduira à la partie $f'(z)$, qui est une fonction de z seulement, indépendante de dz et, par conséquent, de l'angle φ.

On voit donc qu'une fonction d'une variable complexe étant définie comme ce que devient une fonction $f(z)$ d'une varable réelle, lorsqu'on substitue à z des valeurs complexes, cette fonction

jouira de la même propriété fondamentale que les fonctions d'une variable réelle, c'est-à-dire qu'elle aura, pour chaque valeur de z, une *dérivée par rapport à z,* généralement déterminée et finie, dépendant seulement de z, et nullement de la nature de l'accroissement infiniment petit de cette variable.

Les fonctions de variables complexes, ainsi définies, peuvent donc être soumises au calcul d'après les mêmes règles de différentiation et d'intégration que les fonctions de variables réelles; de sorte que, si une fonction est bien définie pour les valeurs réelles de la variable, et si elle est formée au moyen des opérations élémentaires dont la signification a pu être étendue au cas des quantités complexes, on pourra calculer sa *différentielle* et son *intégrale indéfinie,* sans s'inquiéter de savoir si la valeur actuelle de la variable est réelle ou complexe.

98. Une variable complexe z étant une fonction de ses deux composantes x et y, indépendantes entre elles, il en sera de même de toute fonction $f(z)$ de z, et l'on pourra former les dérivées partielles de $f(z)$ par rapport à chacune des variables indépendantes x, y. Si l'on pose donc, pour un instant,

$$f(z) = f(x + iy) = F(x, y),$$

on aura identiquement

$$\frac{F(x + dx, y) - F(x, y)}{dx} = \frac{f(z + d_x z) - f(z)}{d_x z} \cdot \frac{d_x z}{dx},$$

$$\frac{F(x, y + dy) - F(x, y)}{dy} = \frac{f(z + d_y z) - f(z)}{d_y z} \cdot \frac{d_y z}{dy}.$$

Or, d'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, chacun des rapports

$$\frac{f(z + d_x z) - f(z)}{d_x z}, \quad \frac{f(z + d_y z) - f(z)}{d_y z}$$

a pour limite la *dérivée* de $f(z)$, ou $f'(z)$. Ensuite

$$\frac{d_x z}{dx} = 1, \quad \frac{d_y z}{dy} = i.$$

Donc

$$D_x F(x, y) = D_x f(z) = f'(z),$$

$$D_y F(x, y) = D_y f(z) = i f'(z).$$

Ces valeurs montrent que les deux dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$ ou $f(z)$ des deux variables indépendantes x, y, sont liées entre elles par la relation

(1) $$D_x F(x, y) = \frac{1}{i} D_y F(x, y),$$

ou

(2) $$D_x f(z) = \frac{1}{i} D_y f(z).$$

99. Les fonctions $f(z)$, dont nous venons d'établir la propriété fondamentale, ne sont pas prises dans le sens le plus général que l'on attache au mot *fonction,* si l'on entend par *fonction* toute quantité dont la valeur est déterminée pour chaque système de valeurs des variables dont elle dépend.

On pourrait dire, en effet, que les deux variables x et y étant déterminées dès que l'on a choisi la valeur de la variable complexe z, cette dernière représente à elle seule un système de valeurs des deux variables réelles x, y; et par suite, qu'en donnant à z toutes les valeurs possibles, on obtiendra tous les systèmes de valeurs des variables x, y, dont dépend la fonction quelconque $F(x, y)$ de deux variables réelles.

Mais on peut prévoir *a priori* qu'une telle généralisation n'est pas admissible. Elle tient, en effet, à la valeur particulière attribuée au symbole i, d'où dépend la décomposition en deux composantes rectangulaires de la variable z attachée à chaque point du plan. Or, l'usage des variables complexes dans l'Analyse est fondé sur la généralisation des opérations, en vertu de laquelle le symbole i est traité indépendamment de sa signification particulière, et le binôme $x + iy$ soumis aux mêmes règles d'opérations que si la lettre i représentait une constante quelconque. D'après cela, l'extension donnée à la définition des fonctions, lorsqu'on y remplace la variable réelle z par le binôme $x + iy$, doit consister à traiter ce binôme comme si la constante i avait une valeur quelconque, puis à particulariser cette valeur seulement dans le résultat.

Nous appellerons donc *fonction* de la variable complexe $z = x + iy$ ce que devient la fonction

$$f(x + \alpha y),$$

définie pour les valeurs réelles de x et de y et pour une valeur quelconque de la constante α, lorsqu'on donne à cette constante la valeur particulière i.

100. Il est facile d'obtenir la condition pour qu'une fonction $F(x, y)$ des variables indépendantes x, y puisse être considérée comme une fonction du binôme $x + \alpha y$. Si l'on pose, en effet,

$$F(x, y) = f(x + \alpha y),$$

on aura

$$D_x F(x, y) = f'(x + \alpha y),$$

$$D_y F(x, y) = \alpha f'(x + \alpha y).$$

Donc

$$D_x F(x, y) = \frac{1}{\alpha} D_y F(x, y),$$

condition nécessaire, qui, pour $\alpha = i$, se change dans l'équation (1).

Réciproquement, cette condition est suffisante; car, si elle est satisfaite, alors on aura

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= D_x F(x, y) \, . \, dx + D_y F(x, y) \, . \, dy \\ &= D_x F(x, y)(dx + \alpha dy), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dF(x, y)}{d(x + \alpha y)} = D_x F(x, y),$$

quantité indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$, et que l'on peut représenter par $f'(x + \alpha y)$, comme on le verrait par un raisonnement connu. Donc

$$dF(x, y) = df(x + \alpha y),$$

et par suite $F(x, y)$ ne dépend que du binôme $x + \alpha y$, et ne change pas si x et y varient d'une manière quelconque, tant que la valeur de ce binôme reste invariable.

Si l'on suppose maintenant $\alpha = i$, on retrouve la condition (1) du n° 98, laquelle est ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de deux variables $F(x, y)$ puisse être considérée comme une fonction du binôme $z = x + iy$.

101. On peut aisément vérifier en même temps que cette condition exprime que $F(x, y)$ a une *dérivée* déterminée par rapport à $z = x + iy$. En effet, cette relation est nécessaire et suffisante pour que le rapport

$$\frac{dF(x, y)}{dz} = \frac{D_x F(x, y) + D_y F(x, y) \cdot \frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$.

Donc l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad D_x F(x, y) = \frac{1}{i} D_y F(x, y)$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $F(x, y)$ des deux variables indépendantes réelles x, y puisse être traitée, d'après les règles de l'Analyse des quantités réelles, comme une fonction de la seule variable complexe $z = x + iy$, et, en particulier, pour qu'elle jouisse de la propriété fondamentale des fonctions d'une seule variable, d'avoir, par rapport à cette variable, une *dérivée déterminée,* indépendante du mode d'accroissement de cette variable (*).

102. Séparons maintenant, dans la fonction

$$w = f(z) = f(x + iy),$$

le réel de l'imaginaire, et posons

$$w = u + iv.$$

(*) Cauchy n'admettait pas cette restriction dans la définition d'une fonction d'une variable complexe, et il appelait fonctions *monogènes* celles qui satisfont à la définition restreinte. Mais comme tous ses théorèmes s'appliquent exclusivement aux fonctions monogènes, les autres fonctions ne jouissant que des propriétés générales des fonctions de deux variables indépendantes, et leur calcul ne pouvant se ramener à celui des fonctions d'une seule variable, il vaut mieux, à l'exemple de Riemann, exclure tout d'abord de nos recherches les fonctions non monogènes, et réserver aux seules fonctions monogènes le nom de *fonctions* de la variable complexe $x + iy$. On évite ainsi la répétition inutile d'un mot qui reviendrait invariablement dans chaque énoncé.

L'équation (1) deviendra alors

$$D_x(u + iv) = \frac{1}{i} D_y(u + iv) ,$$

ou

$$D_x u - D_y v + i(D_x v + D_y u) = 0 .$$

Cette équation se partage en deux autres,

$$(2) \qquad D_x u = D_y v , \qquad D_y u = - D_x v ,$$

qui expriment les conditions auxquelles doivent satisfaire les onctions u, v des variables indépendantes x, y, pour que $u + iv$ puisse être considéré comme une fonction du binôme $x + iy$, jouissant de la propriété fondamentale des fonctions d'une seule variable.

103. On verrait de même, en introduisant les coordonnées polaires au lieu des coordonnées rectangulaires x,y, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression

$$w = Re^{iP} ,$$

(R et P étant des fonctions réelles de r et de p), soit une fonction de

$$z = re^{ip} ,$$

est que l'on ait

$$D_r w + \frac{i}{r} D_p w = 0 ,$$

équation qui se partage en deux autres.

$$r.D_r R = R.D_p P, \qquad rR.D_r P = - D_p R .$$

104. On peut vérifier effectivement, sur des exemples très simples, qu'une fonction de x et de y, qui ne satisfait pas aux relations (1) ou (2), n'a pas de dérivée par rapport à z, indépendante de l'argument de dz.

Soit, par exemple,

$$w = u + iv = x - iy ,$$

qui ne satisfait pas à la relation (1).

On a, en posant $dz = \rho e^{i\varphi}$,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dx - idy}{dx + idy} = \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi},$$

quantité qui dépend de φ.

105. Si l'on différentie les équations (2) par rapport à x et à y, on en tire, en éliminant tour à tour v et u, les équations

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0,$$
$$D_x^2 v + D_y^2 v = 0.$$

Donc les deux fonctions u et v ne peuvent ni l'une ni l'autre être choisies arbitrairement. Elles doivent satisfaire toutes les deux à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$D_x^2 \gamma + D_y^2 \gamma = 0. \tag{3}$$

106. Si nous supposons remplies les conditions (2), posons

$$\begin{cases} X = D_x u = D_y v, \\ Y = -D_y u = D_x v, \end{cases} \tag{4}$$

d'où

$$\begin{cases} D_x w = X + iY, \\ D_y w = -Y + iX = iD_x w, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} dw &= (X + iY)\,dx + (-Y + iX)\,dy \\ &= (X + iY)\,(dx + idy) = (X + iY)\,dz. \end{aligned}$$

Donc la dérivée totale $\frac{dw}{dz}$ a pour valeur

$$\frac{dw}{dz} = X + iY, \tag{6}$$

et par conséquent on a

$$\frac{dw}{dz} = D_x w = \frac{1}{i} D_y w. \tag{7}$$

107. La dérivée $\frac{dw}{dz}$, donnée par l'équation (6), est elle-même

une fonction de z. En effet, d'après les équations (4), on a

$$\begin{aligned} D_x X &= \ \ D_x D_y v = \ \ D_y Y, \\ D_x Y &= -D_x D_y u = -D_y X, \end{aligned}$$

et ce sont là les conditions pour que $X + iY$ soit une fonction de $z = x + iy$.

Il en est de même, en vertu des équations (7), des dérivées partielles de w par rapport à x et à y.

Donc, si w est une fonction de $z = x + iy$, toutes les dérivées, totales ou partielles, de cette fonction seront aussi des fonctions de $z = x + iy$.

Remarque. Il est facile d'exprimer toutes les dérivées partielles des fonctions u et v, prises par rapport à x et à y à la fois, au moyen de dérivées prises par rapport à une seule de ces variables. En effet, de l'équation (3), à laquelle u et v satisfont, résulte la formule symbolique

$$D_y^2 = -D_x^2,$$

d'où

$$D_y^{2n} = (-1)^n D_x^{2n}.$$

Donc

$$D_x^m D_y^{2n} u = (-1)^n D_x^{m+2n} u,$$

Ensuite, en vertu des équations (4),

$$D_x^m D_y^{2n+1} u = (-1)^n D_x^{m+2n} D_y u = (-1)^{n+1} D_x^{m+2n+1} v.$$

On peut ainsi tout ramener à des dérivées de u ou de v prises par rapport à une seule des variables, à x, par exemple.

Comme d'ailleurs, d'après la formule (7),

$$\frac{d^n w}{dz^n} = D_x^n w,$$

il s'ensuit de là que toutes les dérivées partielles de u ou de v se ramènent à la partie réelle ou à la partie imaginaire de la dérivée totale de même ordre de w par rapport à z.

108. Supposons que la variable z soit elle-même une fonction d'une autre variable $\zeta = \xi + i\eta$, de sorte que l'on ait

$$z = \varphi(\zeta) = \varphi(\xi + i\eta).$$

Toute fonction $w = f(z)$ de z sera aussi une fonction de ζ. On a, en effet,

$$D_\xi w = f'(z).D_\xi z, \qquad D_\eta w = f'(z).D_\eta z,$$

d'où, en vertu de l'équation (1), à laquelle $z = \varphi(\zeta)$ satisfait,

$$D_\xi w + iD_\eta w = f'(z)\,(D_\xi z + iD_\eta z) = 0.$$

Donc w, considéré comme fonction de ξ et de η, satisfait aussi à l'équation (1); c'est donc une fonction de $\xi + i\eta$.

Autrement, on a, quel que soit dz,

$$dw = f'(z)\,dz.$$

Or, z étant une fonction de ζ,

$$dz = \varphi'(\zeta)\,d\zeta,$$

Donc

$$dw = f'(z)\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta,$$

d'où

$$\frac{dw}{d\zeta} = f'(z)\varphi'(\zeta),$$

quantité indépendante de la *direction* de $d\zeta$.

109. L'équation (6) exprime une relation géométrique remarquable entre les points du plan qui représentent la fonction w et la variable indépendante z. Si l'on représente les différentielles de z et de w par

$$dz = \rho e^{i\varphi}, \qquad dw = \sigma e^{i\chi},$$

l'équation (6) donne

$$\frac{\sigma}{\rho} e^{i(\chi - \varphi)} = X + iY,$$

d'où, en égalant de part et d'autre les modules et les arguments,

$$\frac{\sigma}{\rho} = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\chi - \varphi = \text{arc tang } \frac{Y}{X}.$$

On voit par là que, dz et dw étant deux accroissements infiniment petits simultanés de la variable z et de la fonction w, le rapport des modules $\frac{\sigma}{\rho}$ et la différence des arguments $\chi - \varphi$ de ces accroissements ne dépendent pas de φ ou de dz, mais seulement de la position du point z lui-même.

Donc, si $\overline{zz_1}$, $\overline{zz_2}$ sont deux accroissements infiniment petits de z, et $\overline{ww_1}$, $\overline{ww_2}$ les accroissements correspondants de w, les deux triangles zz_1z_2, ww_1w_2 seront toujours *directement semblables*.

Fig. 26.



Si z décrit un contour infiniment petit quelconque, w décrira un contour directement semblable.

Ainsi deux figures quelconques formées l'une par un système de points z, l'autre par le système des points w correspondants, sont semblables *dans leurs éléments infiniment petits* (*).

§ II.

Continuité et discontinuité des fonctions.

110. Une fonction d'une seule variable réelle x,

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

est dite *continue* dans le voisinage de la valeur x, lorsque la différence

$$df(x) = f(x + dx) - f(x)$$

est infiniment petite en même temps que dx. Dans le cas contraire, la fonction est dite *discontinue*.

De même, une fonction $f(x,y)$ de deux variables réelles est dite

(*) *Voy.* SIEBECK, *Ueber die graphische Darstellung u. s. w.* (*Crelle's Journal*, tome LV).

continue dans le voisinage du point (x,y), toutes les fois que la différence

$$df(x,y) = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$$

est infiniment petite, quels que soient les accroissements dx, dy, pourvu qu'ils soient l'un et l'autre infiniment petits. Dans le cas contraire, la fonction est *discontinue*.

111. Une fonction $f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$, étant un cas particulier d'une fonction de deux variables réelles, sera continue lorsque la différence

$$df(z) = f(z+dz) - f(z)$$

sera infiniment petite en même temps que dx et que dy, et par suite en même temps que le module de dz, ou que dz lui-même.

D'après cela, $f(z)$ variera d'une manière continue entre deux limites données z_0, Z, lorsque, z passant de la position z_0 à la position Z par un chemin de forme quelconque, pourvu qu'il ne présente aucune interruption, les valeurs de $f(z)$, correspondantes à deux positions consécutives de z *sur le chemin donné*, sont infiniment voisines. Nous ne considérons comme infiniment voisines que deux positions de z séparées *par un arc infiniment petit du chemin donné :* nous verrons plus tard que l'on peut avoir lieu de ne pas regarder comme telles deux positions de z prises sur deux branches différentes d'une courbe qui se coupe elle-même, bien que ces deux positions puissent être séparées par une droite infiniment petite.

112. Une fonction peut être discontinue de plusieurs manières, soit en passant brusquement d'une valeur finie à une valeur finie différente, comme cela a lieu pour la fonction représentée par l'ordonnée d'une courbe qui offre un point de rupture, ou encore pour les fonctions représentées par certaines intégrales définies; soit en devenant infinie pour certaines valeurs de la variable, comme les fonctions

$$\frac{1}{z-c}, \qquad \tang \frac{\pi z}{2c}, \qquad e^{\frac{1}{z-c}},$$

qui deviennent infinies pour $z = c$.

Un point $z = c$, pour lequel la fonction $f(c)$ devient infinie, s'appelle, pour abréger, un *infini* de cette fonction; de même qu'un point pour lequel la fonction s'annule est dit un *zéro* de cette fonction.

113. Considérons l'inverse $\frac{1}{f(z)}$ de la fonction $f(z)$. A chaque zéro de l'une des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$, correspond un infini de l'autre. La considération de cette valeur inverse $\frac{1}{f(z)}$ va nous conduire à partager en deux classes les *points de discontinuité* de la fonction $f(z)$.

La fonction $f(z)$ devenant infinie pour $z = c$, il peut arriver que la valeur réciproque $\frac{1}{f(z)}$ soit continue dans le voisinage de $z = c$. C'est ce qui aura lieu toutes les fois que $f(c + dz)$ sera infiniment grand tout autour du point c. Car $\frac{1}{f(c + dz)}$ étant infiniment petit tout autour de c et nul au point c lui-même, la continuité existera pour la fonction $\frac{1}{f(z)}$ tout autour de ce point c.

Nous dirons, dans ce cas, que le point c est un *point de discontinuité de* PREMIÈRE ESPÈCE ou un *infini de* PREMIÈRE ESPÈCE. Comme ce cas est celui que nous aurons presque toujours à considérer, nous conviendrons une fois pour toutes que, toutes les fois que nous parlerons d'un *point de discontinuité* ou d'un *infini,* sans autre désignation, il s'agira d'un point de discontinuité ou d'un infini *de première espèce*.

De même, nous appellerons zéros *de première espèce,* ou simplement *zéros* d'une fonction $f(z)$ les points c tels que $f(c + dz)$ soit infiniment petit tout autour de point c et nul au point c lui-même.

Ainsi, tout *zéro* de l'une des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ sera un *infini* de l'autre, et réciproquement; et, pour un tel point, l'une des deux fonctions restera toujours continue, tandis que l'autre passera par l'infini.

114. Nous appellerons *points de discontinuité de* SECONDE ESPÈCE les points de discontinuité de $f(z)$ pour lesquels $\frac{1}{f(z)}$ n'est pas con-

tinue. C'est ce qui arrive lorsque la fonction $f(z)$ passe brusquement d'une valeur finie g à une autre valeur finie h: la fonction $\frac{1}{f(z)}$ éprouve alors une solution de continuité, en passant brusquement de la valeur $\frac{1}{g}$ à la valeur $\frac{1}{h}$.

Une discontinuité de seconde espèce peut correspondre à une valeur finie de $f(z)$, lorsque la fonction $f(c+dz)$ n'est pas infinie tout autour du point c. Car alors $\frac{1}{f(c+dz)}$ n'est pas infiniment petit tout autour de c, et passe, dans un intervalle infiniment petit, d'une valeur nulle à une valeur finie ou infiniment grande.

Considérons, par exemple, la fonction

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-c}}$$

Si $z-c$ a une valeur réelle et positive ε, $f(z)$ sera infini pour $z-c$ infiniment petit. Au contraire, pour $z-c$ négatif et $=-\varepsilon$, $f(z)$ sera infiniment petit pour ε infiniment petit. Pour les autres valeurs voisines de c, $f(z)$ est indéterminé. Donc c est un point de discontinuité de seconde espèce de la fonction $f(z)$.

115. Si $f(x)$ est une fonction de la variable x supposée ***réelle***, et que cette fonction soit toujours *continue*, ou simplement *finie* entre les valeurs x_0 et X de cette variable, on démontre, dans le Calcul intégral, que la formule

$$f(X) - f(x_0) = \int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx$$

est toujours vraie, de quelque manière que se comporte la dérivée $f'(x)$ entre ces limites, cette dérivée pouvant devenir discontinue ou même infinie dans cet intervalle.

§ III.

Fonctions uniformes et fonctions multiformes.

116. Une fonction est dite *uniforme*, lorsqu'elle n'admet qu'une seule valeur déterminée, pour chaque valeur donnée de la variable.

Telles sont les fonctions qui résultent des opérations rationnelles

d'addition et de soustraction, de multiplication et de division, d'élévation aux puissances entières, ou de combinaisons quelconques d'un nombre fini de ces opérations.

Telles sont encore les fonctions définies comme limites de sommes de séries convergentes, dont tous les termes sont des fonctions uniformes : par exemple, la fonction exponentielle e^z, et les fonctions circulaires directes $\sin z$, $\cos z$,..., qui s'en déduisent.

117. Si une fonction $f(z)$ est uniforme, sa valeur réciproque $\frac{1}{f(z)}$ est aussi uniforme.

Il en est de même évidemment de toute fonction uniforme de $f(z)$, qui est aussi une fonction uniforme de z.

118. Si l'une des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ a un infini (de première espèce) au point c, l'autre, étant continue dans le voisinage de ce point (qui est pour elle un zéro), sera encore une fonction uniforme en ce point. Nous dirons alors que celle des fonctions qui devient infinie est encore uniforme dans le voisinage de son infini, et en cet infini même.

Si, au contraire, la fonction $f(z)$ a en c une discontinuité de seconde espèce, auquel cas il en est de même pour la fonction $\frac{1}{f(z)}$, alors $f(z)$ et $\frac{1}{f(z)}$ cesseront d'être uniformes au point c lui-même, bien qu'elles puissent être uniformes en tout autre point.

Nous verrons que l'on peut cependant, dans certains cas, traiter ces fonctions comme si elles étaient partout uniformes, pourvu que ces solutions de continuité de seconde espèce soient en nombre fini dans un espace donné.

119. Si deux variables w et z sont liées entre elles de telle manière que, pour chaque valeur de z, w prenne une valeur déterminée, mais qu'elle ne prenne jamais la même valeur pour deux valeurs de z différentes entre elles ; alors z pourra être considéré comme une fonction uniforme de la variable w.

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les fonctions

$$w = az + b, \qquad w = \frac{az+b}{cz+d},$$

z étant dans les deux cas une fonction uniforme de w, aussi bien que w est une fonction uniforme de z.

120. Mais généralement il n'en est pas ainsi. Une fonction w de z reprend la même valeur en des points différents du plan, en nombre fini ou infini. Il en résulte alors que, si l'on considère réciproquement z comme une fonction de w, la valeur en question de w correspondra à plusieurs valeurs différentes de z, et que z sera une fonction *multiforme* de w.

Ainsi, nous avons vu que la fonction

$$w = z^n,$$

n étant entier, prend des valeurs égales en n points distribués régulièrement sur une même circonférence. Si donc on cherche à déterminer z par la condition que w prenne une valeur donnée w_1, on trouvera pour solution n points différents. On dira alors que z est une fonction de *w à n déterminations*, ou une fonction n-FORME.

Si deux variables w et z sont liées entre elles par une équation algébrique du degré m par rapport à w et du degré n par rapport à z, w sera une fonction m-forme de z, et z une fonction n-forme de w.

La fonction exponentielle

$$w = e^z$$

ne change pas, lorsqu'on augmente z d'un multiple quelconque de $2\pi i$. Donc la fonction inverse

$$z = \log w,$$

définie par l'équation précédente, sera une fonction *infinitiforme*, admettant, pour chaque valeur de w, toutes les valeurs, en nombre infini, comprises dans la formule

$$z + 2k\pi i,$$

quel que soit l'entier k.

Remarquons, en général, que, si la fonction $w = f(z)$ est périodique, la fonction inverse $z = \varphi(w)$ admettra une infinité de

valeurs, différant entre elles de multiples quelconques de l'indice de périodicité.

121. Nous ne traiterons, dans cette SECONDE PARTIE, que des fonctions qui sont uniformes soit dans toute l'étendue du plan, soit du moins dans la partie de plan considérée, et qui, de plus, ne présentent dans cet espace que des discontinuités de première espèce.



CHAPITRE III.

INTÉGRALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

§ Ier.

De l'intégrale d'une fonction de deux variables prise dans l'étendue d'une aire donnée.

122. Nous appellerons *aire* une portion de plan limitée de toutes parts, et *contour* de l'aire la ligne ou l'ensemble de lignes qui limite cette aire.

Si le contour forme un trait continu, et ne se coupe point lui-même, de sorte qu'on puisse parcourir ce contour en entier sans pénétrer dans l'aire, on dira que l'aire est à *connexion simple* (1). Telles sont les aires d'un cercle, d'une ellipse, d'un rectangle, etc.

Si, au contraire, le contour se compose de plusieurs courbes fermées qui ne se rencontrent pas, de sorte qu'on ne puisse passer de l'une de ces portions de contour à l'autre sans pénétrer dans l'aire, on dira que l'aire est à *connexion multiple* (2). Telle est l'aire comprise entre deux cercles concentriques.

L'aire est à *connexion double, triple, quadruple,* etc. (3), suivant que les portions du contour indépendantes entre elles sont au nombre de 2, de 3, de 4, etc. L'aire comprise entre deux cercles concentriques est à connexion double. L'aire représentée par la partie blanche de la figure 27 est à connexion quadruple.

Fig. 27.

123. Une même ligne servant à la fois de limite aux deux portions de plan qu'elle sépare, il importe de distinguer celle de ces deux portions que l'on veut considérer.

Nous supposerons un observateur debout sur la partie *supérieure* du plan, et parcou-

(1) *Einfach zusammenhängend* (Riemann).
(2) *Mehrfach zusammenhängend.*
(3) *Zwei-, drei-, vierfach zusammenhängend.*

rant le contour de l'aire considérée, de manière que cette aire soit toujours *à sa gauche*. Le sens dans lequel marchera cet observateur s'appellera le *sens direct* ou la *direction positive* du contour de cette aire. Le sens opposé s'appellera *le sens rétrograde* ou la *direction négative* de ce contour.

Si l'on considère tour à tour les deux portions de plan limitées par la même ligne, le sens qui sera direct par rapport à l'une sera rétrograde par rapport à l'autre. Il suffira d'indiquer le sens que l'on considère comme direct, pour que l'on sache par cela même de laquelle des deux portions du plan il doit être question.

Ainsi, dans la figure 27, les flèches indiquent le sens direct du contour de la partie blanche de l'aire, et le sens rétrograde du même contour considéré par rapport à la partie noire.

124. Une droite indéfinie dans les deux sens, menée à travers une aire, rencontre nécessairement le contour de l'aire un nombre *pair* de fois, autant de fois pour entrer dans l'aire que pour en sortir.

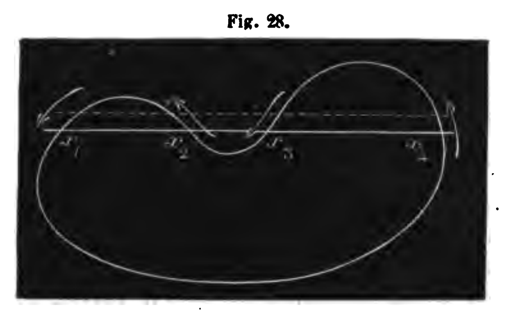
Supposons d'abord cette droite parallèle à l'axe des x. Si l'on représente par

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2n}$$

les abscisses des points de rencontre consécutifs, les abscisses d'indices *impairs* correspondent à des *entrées*, les abscisses d'indices *pairs* à des *sorties*.

Si un point s'avance sur le contour (*fig. 28*) de manière que sa projection sur l'axe des y marche dans le sens des y positives; en

Fig. 28.



d'autres termes, si ce point passe de dessous au-dessus de la parallèle aux x, ce point marchera dans le sens *rétrograde* à chaque *entrée*, dans le sens *direct* à chaque *sortie*.

Il résulte de là que, si un point parcourt le contour constamment dans le sens direct, la direction qu'il suit lorsqu'il passe par un point de *sortie* fait un angle *aigu* avec la portion positive de l'axe des y; lorsqu'il passe, au contraire, par un point d'*entrée*, cette direction fait avec le même axe un angle *obtus*.

D'après cela, si l'on désigne par dy_k la variation de y lorsque le point mobile sur le contour rencontre la parallèle aux x à l'extrémité de l'abscisse x_k, dy_k sera positif, si x_k est l'abscisse d'un point de sortie, ou si l'indice k est pair; négatif, si x_k est l'abscisse d'un point d'entrée, ou si l'indice k est impair. Si l'on désigne donc par dy la distance absolue de deux parallèles à l'axe des x infiniment voisines, on aura, en général,

$$dy_k = (-1)^k dy$$

125. Soit maintenant $V = V(x,y)$ une fonction, réelle ou complexe, des deux variables x, y, continue (et, par suite, finie) dans toute l'étendue d'une aire donnée $\mathfrak{A}$, *y compris le contour de cette aire*. Supposons, de plus, que la fonction V soit *uniforme* dans cette étendue, c'est-à-dire qu'elle ne soit susceptible que d'une seule valeur pour un système quelconque de valeurs de x et de y, correspondant à un point quelconque de l'aire ou de son contour.

Il pourra se faire, dans certains cas, que la dérivée partielle $D_x V$ ne soit pas toujours finie et continue; mais il nous suffit que la fonction V elle-même le soit.

Considérons l'intégrale double

$$\int\int_{\mathfrak{A}} D_x V.dxdy,$$

relative à tous les éléments $dxdy$ de l'aire $\mathfrak{A}$. Pour l'évaluer, nous couperons d'abord l'aire par des parallèles à l'axe des x infiniment rapprochées, et nous évaluerons la valeur de l'intégrale correspondante à la tranche infiniment mince, comprise entre deux de ces parallèles consécutives.

Cette valeur se composera d'autant de parties qu'il y a de couples de points d'entrée et de sortie. On prendra l'intégrale indéfinie.

$$dy.\int D_x V.dx = Vdy;$$

on ajoutera les valeurs correspondantes aux points de sortie, et l'on retranchera les valeurs correspondantes aux points d'entrée. Si donc on désigne par V_k la valeur de V qui répond à l'abscisse x_k, on devra ajouter les valeurs de $V_k dy$ qui répondent à k pair, et retrancher les valeurs qui correspondent k impair, ce qui donne

$$\Sigma(-1)^k V_k dy.$$

Or, d'après ce que nous avons vu, si dy_k est la variation de y obtenue lorsqu'on traverse l'intervalle des deux parallèles en parcourant le contour de l'aire dans le sens direct, on a

$$dy_k = (-1)^k dy.$$

Donc la valeur de l'intégrale relative à la tranche peut s'exprimer par

$$\Sigma V_k dy_k.$$

Pour avoir maintenant l'intégrale double relative à l'aire totale $\mathfrak{A}$, il faudra faire la somme de toutes les expressions analogues à la précédente, en faisant varier y entre ses limites extrêmes. Or, il est clair que l'on aura ainsi à faire la somme de toutes les expressions $V_k dy_k$ relatives à tous les éléments du contour de l'aire.

Si donc nous désignons par

$$\int_{\mathfrak{A}} Vdy$$

la somme de tous les éléments Vdy, relatifs à tous les points du contour de l'aire $\mathfrak{A}$, et dans lesquels dy représente l'accroissement, positif ou négatif, de y, correspondant à un déplacement infiniment petit d'un point mobile sur le contour *dans le sens direct;* nous obtiendrons la formule

$$(1) \qquad \int\int_{\mathfrak{A}} \mathrm{D}_x V.dxdy = \int_{\mathfrak{A}} Vdy,$$

où l'on observera que la notation $\int\int_{\mathfrak{A}}$ représente une intégrale double, prise *sur toute la surface* de l'aire $\mathfrak{A}$, tandis que la notation $\int_{\mathfrak{A}}$ désigne une intégrale simple, prise *tout le long du contour* de l'aire $\mathfrak{A}$, ce contour étant toujours supposé parcouru *dans le sens direct.*

126. Si l'on considère de même l'intégrale double

$$\int\int_{\mathfrak{A}} D_y U . dxdy ,$$

U étant encore une fonction de x et de y, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, nous verrons que l'on aura, pour valeur de cette intégrale,

$$(2) \qquad \int\int_{\mathfrak{A}} D_y U . dxdy = - \int_{\mathfrak{A}} U dx ,$$

le signe — provenant ici de ce que, dans une tranche parallèle à l'axe des y, les dx_k relatifs aux points d'entrée doivent être pris positivement, et les dx_k relatifs aux points de sortie négativement.

127. En retranchant l'une de l'autre les équations (1) et (2), nous obtiendrons la formule fondamentale

$$(3) \qquad \int\int_{\mathfrak{A}} (D_x V - D_y U) \, dxdy = \int_{\mathfrak{A}} (U dx + V dy) .$$

On a donc ce théorème :

Si U et V sont deux fonctions de x et de y, uniformes et continues dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, la valeur de l'intégrale double

$$(4) \qquad \int\int_{\mathfrak{A}} (D_x V - D_y U) \, dxdy ,$$

étendue à tous les éléments superficiels $dxdy$ de cette aire, est égale à la valeur de l'intégrale simple

$$(5) \qquad \int_{\mathfrak{A}} (U dx + V dy) ,$$

prise en donnant à x et à y successivement tous les systèmes de valeurs qui correspondent aux divers points du contour total de l'aire, ce contour étant parcouru DANS LE SENS DIRECT.

128. Si l'expression

$$U dx + V dy$$

est une *différentielle exacte*, $D_x V - D_y U$ s'annulera identique-

ment pour toutes les valeurs de x et de y. Donc l'intégrale double (4) sera identiquement nulle, et, comme la formule (3) ne cessera pas de subsister, l'intégrale (5) sera donc pareillement nulle. Donc,

Toutes les fois que U et V étant deux fonctions de x, y, uniformes et continues dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, l'expression

$$Udx + Vdy\,.$$

sera une différentielle exacte, c'est-à-dire toutes les fois que l'on aura identiquement

$$D_x V - D_x U = 0,$$

l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} (Udx + Vdy),$$

prise le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$ sera nulle [1].

Ce qui a lieu pour l'aire totale $\mathfrak{A}$ est vrai également pour toute portion de cette aire. Donc l'intégrale (5) est nulle aussi, lorsqu'on la prend tout le long d'une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$ [2].

129. Il est aisé de voir que, si l'on prend une même intégrale quelconque, telle que $\int Udx$, le long d'une même ligne finie, fermée ou non, en parcourant successivement cette ligne dans les deux sens opposés, les deux valeurs obtenues pour l'intégrale se composent d'éléments égaux, mais de signes contraires. Donc ces deux valeurs seront égales et de signes contraires.

130. Cela posé, si l'on désigne, pour un instant, par $\int(\mathrm{ADB})$ la

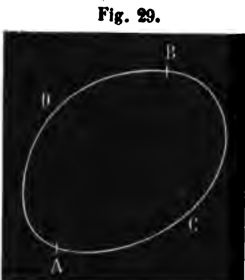
---

[1] Voyez RIEMANN, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, 1851 (pages 8 et suiv.).

[2] Si l'aire $\mathfrak{A}$ était à connexion multiple (nº 122), on ne devrait considérer comme une ligne fermée tracée à l'intérieur de l'aire qu'une ligne pouvant, par des déformations continues, se réduire à un seul point *sans sortir de l'aire*, et sans pénétrer dans les *enclaves* qui n'en font point partie. Par exemple, la proposition ne serait pas vraie pour une courbe fermée qui entourerait une de ces enclaves de toutes parts.

valeur d'une certaine intégrale prise le long de l'arc ADB (*fig.* 29), cet arc étant parcouru dans le sens indiqué par l'ordre des lettres, on aura

Fig. 29.



$$\int(\mathrm{ADB}) = -\int(\mathrm{BDA}).$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\int(\mathrm{ACBDA}) = \int(\mathrm{ACB}) + \int(\mathrm{BDA}).$$

On peut donc écrire aussi

$$\int(\mathrm{ACBDA}) = \int(\mathrm{ACB}) - \int(\mathrm{ADB}).$$

Si maintenant l'intégrale $\int(\mathrm{ACBDA})$, étendue au contour fermé tout entier, est nulle, on en conclura

$$\int(\mathrm{ACB}) = \int(\mathrm{ADB}).$$

Donc, si l'intégrale considérée est nulle lorsqu'on la prend tout le long d'une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, la valeur de cette intégrale restera la même lorsqu'on la prendra le long de toutes les courbes finies tracées à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$ entre les mêmes extrémités A et B.

C'est ce qui a lieu en particulier pour l'intégrale (5), lorsque $Udx + Vdy$ est une différentielle exacte. Donc, *si U et V sont deux fonctions de x et de y, uniformes et continues dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$ et telles que $Udx + V\,dy$ soit une différentielle exacte; si, de plus,* A *et* B *sont deux points quelconques de l'intérieur ou du contour de l'aire $\mathfrak{A}$, l'intégrale*

$$\int(Udx + Vdy),$$

prise le long d'une ligne quelconque tracée de A *en* B *à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, est indépendante de la forme de cette ligne, et on peut la considérer comme une fonction des coordonnées des extrémités* A *et* B *de la ligne, ou seulement des coordonnées d'une seule de ces extrémités, si l'autre est supposée fixe.*

131. Soit maintenant

$$w = u + iv$$

une fonction de la variable complexe

$$z = x + iy,$$

et supposons cette fonction uniforme et continue à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. On a, d'après ce que nous avons vu dans le Chapitre précédent,

$$D_x u = D_y v, \qquad D_y u = -D_x v.$$

Donc chacune des expressions

$$vdx + udy, \qquad udx - vdy$$

est une différentielle exacte.

En appliquant donc le théorème du n° 128, on en conclura d'abord que chacune des intégrales

$$\int_{\mathfrak{A}} (vdx + udy), \qquad \int_{\mathfrak{A}} (udx - vdy),$$

prise tout le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$ est nulle. On aura donc, en les ajoutant, après avoir multiplié la première par i,

$$\int_{\mathfrak{A}} [(u + iv)\,dx + (iu - v)\,dy] = \int_{\mathfrak{A}} (u + iv)(dx + idy) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathfrak{A}} wdz = 0.$$

Donc, *si w est une fonction de la variable complexe z, qui soit uniforme et continue daus toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} wdz$, prise le long du contour de cette aire (ou plus généralement le long d'une courbe fermée quelconque tracée dans cette aire), est nulle.*

132. On en conclut encore que l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} wdz,$$

prise le long d'un chemin quelconque tracé à l'intérieur de l'aire entre les points z_0 et Z, est indépendante de la forme du chemin parcouru, et qu'elle ne dépend que des seules limites z_0 et Z.

133. On voit en outre que c'est une *fonction* (nº 101) de ces limites. Si l'on fait, en effet, varier une de ces limites Z de la quantité dZ, l'intégrale croîtra de

$$\int_{Z}^{Z+dZ} w dz.$$

Soit, maintenant, $w = w(z)$ une fonction de z, uniforme et continue dans tous les points considérés, et soit

$$\int_{z'}^{z''} w dz,$$

une intégrale de cette fonction, prise entre deux points infiniment voisins z', z'', le long d'un chemin quelconque joignant ces deux points. Puisque, d'après le nº précédent, cette intégrale est indépendante de la forme du chemin parcouru, on pourra prendre pour ce dernier l'ensemble des deux composantes rectangulaires $x'' - x'$, $y'' - y'$ de la distance $z'' - z'$. On a alors, en désignant par ξ, η des valeurs moyennes entre x' et x'', et entre y' et y'',

$$\int_{z'}^{z''} w dz = \int_{z'}^{z''} (u + iv)(dx + idy)$$
$$= \int_{x'}^{x''} \left[u(x,y') + iv(x,y')\right] dx + i\int_{y'}^{y''} \left[u(x'',y) + iv(x'',y)\right] dy$$
$$= (x'' - x')\left[u(\xi,y') + iv(\xi,y')\right] + i(y'' - y')\left[u(x'',\eta) + iv(x'',\eta)\right],$$

quantité qui différera infiniment peu de

$$\left[(x'' - x') + i(y'' - y')\right]\left[u(x'y') + iv(x',y')\right] = (z'' - z')w(z').$$

Donc, lorsque z'' converge vers z', le rapport

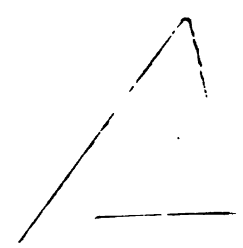
$$\frac{1}{z'' - z'}\int_{z'}^{z''} w dz$$

convergera vers la limite $w(z')$, indépendante de $z'' - z'$.

Il résulte de là que la limite du rapport

$$\frac{1}{dZ}\int_{Z}^{Z+dZ} w dz$$

est la valeur $w(Z)$, indépendante de dZ, de la fonction w pour



$z = Z$. Donc w (Z) est la dérivée de l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} wdz$ par rapport à sa limite supérieure Z.

Par conséquent, cette intégrale remplit la condition nécessaire pour que l'on puisse la considérer comme une fonction de sa limite supérieure, comme dans le cas d'une variable réelle, et de plus cette fonction est uniforme et continue, comme la fonction w elle-même. Il en serait évidemment de même relativement à la limite inférieure. On a ainsi les deux équations

$$\mathrm{D}^{Z} \int_{z_0}^{Z} wdz = w\,(Z),$$

$$\mathrm{D}_{z_0} \int_{z_0}^{Z} wdz = -w\,(z_0).$$

134. Les intégrales définies des fonctions d'une variable complexe, uniformes et continues dans l'étendue d'une aire $\mathfrak{A}$, jouissent donc de propriétés analogues à celles des intégrales définies des fonctions d'une variable réelle.

Si l'on désigne par ζ un point quelconque de l'aire, on aura, comme pour les fonctions d'une variable réelle, l'égalité

$$\int_{z_0}^{Z} wdz = \int_{z_0}^{\zeta} wdz + \int_{\zeta}^{Z} wdz.$$

On déduit de cette formule :

1° La décomposition d'une intégrale définie en deux ou en plusieurs autres;

2° La faculté de remplacer une intégrale, dont les deux limites sont variables, par la différence de deux intégrales, ayant chacune une seule limite variable;

3° Si l'on échange entre elles les limites de l'intégrale, on a (voir n° 129)

$$\int_{z_0}^{Z} wdz = -\int_{Z}^{z_0} wdz.$$

4° Enfin, toutes les fonctions dont la dérivée est $w = w\,(z)$ dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, sont comprises dans la formule

$$\int_{z_0}^{z} wdz + C,$$

C étant une constante indépendante du chemin parcouru pour aller

de z_0 en z. Si l'on désigne par $F(z)$ une quelconque des fonctions comprises dans cette formule, on aura, par l'élimination de C,

$$\int_{z_0}^{Z} w\,dz = F(Z) - F(z_0).$$

135. Si la fonction w est uniforme et continue dans toute l'étendue du plan, comme le sont les fonctions

$$e^z,\quad \cos z,\quad \sin z,\quad z^m,$$

(m étant entier et positif), on pourra supposer l'aire $\mathfrak{A}$ aussi grande que l'on voudra, et prendre pour z_0 et Z deux points quelconques du plan.

Pour de telles fonctions, l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} w\,dz$ aura une signification aussi bien déterminée que pour le cas des variables réelles, et on l'obtiendra de la même manière, en passant par l'intégrale indéfinie.

136. Considérons une intégrale quelconque de la forme

$$\int (U\,dx + V\,dy),$$

U et V étant des fonctions uniformes de x et de y, et soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux aires adjacentes, dont les contours, qui ont une partie commune, ne passent par aucun point de discontinuité des fonctions U, V. Les intégrales prises le long de chacun de ces contours seront des quantités finies et déterminées, quelles que soient les discontinuités que peuvent présenter les fonctions U, V dans l'intérieur des deux aires.

Or on a, dans tous les cas (*fig.* 30),

$$\int_{\mathfrak{A}} (U\,dx + V\,dy) = \int(\text{ACB}) + \int(\text{BEA}),$$

$$\int_{\mathfrak{B}} (U\,dx + V\,dy) = \int(\text{AEB}) + \int(\text{BDA});$$

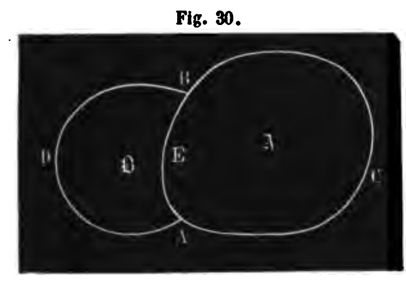
et comme on a (n° 129)

$$\int(\text{BEA}) + \int(\text{AEB}) = 0,$$

il s'ensuit de là que

$$\int_{\mathfrak{A}} + \int_{\mathfrak{B}} = \int(\mathrm{ACB}) + \int(\mathrm{BDA}).$$

Fig. 30.



Or, la somme (ACB + BDA) forme le contour total de l'aire ACBDA $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Donc, en désignant par $\int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}$ l'intégrale prise le long du contour de l'aire totale $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, on a, en général,

$$\int_{\mathfrak{A}} + \int_{\mathfrak{B}} = \int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.$$

Si nous supposons maintenant que

$$Udx + Vdy$$

soit une différentielle exacte, et que les fonctions uniformes U et V soient continues dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, on aura alors $\int_{\mathfrak{A}} = 0$, et par conséquent

$$\int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} (Udx + Vdy) = \int_{\mathfrak{B}} (Udx + Vdy).$$

Donc l'*intégrale prise le long du contour d'une aire quelconque* $\mathfrak{B}$ *ne change pas, lorsqu'on ajoute à l'aire* $\mathfrak{B}$ *une autre aire* $\mathfrak{A}$ *dans laquelle les fonctions U et V sont partout uniformes et continues.*

Par la même raison, *on peut, sans changer la valeur de l'intégrale* $\int_{\mathfrak{B}} (Udx + Vdy)$, *retrancher de l'aire* $\mathfrak{B}$ *toute portion de cette aire à l'intérieur de laquelle les fonctions U et V restent uniformes et continues.*

137. Démontrons encore un théorème dont nous ferons usage plus tard.

Nous avons vu que, si W est une fonction quelconque de x et de y, uniforme et continue dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, on a [125 et 126]

$$\iint_{\mathfrak{A}} D_x W . dxdy = \int_{\mathfrak{A}} W dy,$$

$$\iint_{\mathfrak{A}} D_y W . dxdy = -\int_{\mathfrak{A}} W dx.$$

Soit maintenant $w = u + iv$ une fonction de $z = x + iy$, uniforme et continue dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, ainsi que sa dérivée $D_z w$. Remplaçons W, dans la première des formules précédentes, par $D_x(u^2)$, et, dans la seconde, par $D_y(u^2)$, et ajoutons les résultats. Il viendra

$$\iint_{\mathfrak{A}} \left[D_x^2(u^2) + D_y^2(u^2)\right] dxdy = \int_{\mathfrak{A}} \left[D_x(u^2)\, dy - D_y(u^2)\, dx\right].$$

Or, d'après les propriétés générales des fonctions d'une variable complexe, on a [102 et 105]

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0, \qquad D_x u = D_y v, \qquad -D_y u = D_x v.$$

Il vient donc, en développant et réduisant,

$$\iint_{\mathfrak{A}} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dxdy = \int_{\mathfrak{A}} u(D_x v . dx + D_y v . dy) = \int_{\mathfrak{A}} udv.$$

Mais l'intégrale double du premier membre est essentiellement positive, tant que $D_x u$ et $D_y u$ ne sont pas nuls dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire tant que u n'est pas constant dans toute l'étendue de cette aire.

Si $D_x u$ et $D_y u$ ne sont pas nuls à la fois, les relations que nous avons rappelées tout à l'heure montrent que $D_x v$ et $D_y v$ ne s'annulent pas non plus, et qu'alors v n'est pas une constante, non plus que $w = u + iv$.

Donc l'*intégrale* $\int_{\mathfrak{A}} udv$ *sera positive toutes les fois que* w *ne se réduira pas à une constante en tous les points de l'aire* $\mathfrak{A}$, *et elle ne sera nulle que si* w *est constant.*

§ II.

Des résidus.

138. Soit $w = f(z)$ une fonction de la variable complexe z; supposons que cette fonction reste uniforme dans toute l'étendue

de l'aire $\mathfrak{A}$, mais qu'elle présente, à l'intérieur de cette aire, des solutions de continuité aux points

$$c_1 , \quad c_2 , \ldots , \quad c_n ,$$

en nombre fini, et *isolés* les uns des autres (c'est-à-dire séparés entre eux par des intervalles *finis*).

Entourons chacun de ces points de discontinuité d'un contour fermé aussi petit que l'on voudra, et désignons par

$$\int_c wdz$$

l'intégrale $\int wdz$ prise le long du contour infiniment petit qui entoure le point c.

Si l'on considère la portion de l'aire $\mathfrak{A}$ qui reste après la suppression des aires infinitésimales entourant les points de discontinuité, la fonction w sera uniforme et continue en chaque point de cette portion. On pourra donc, d'après le théorème démontré au nº 136, supprimer cette portion d'aire sans changer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} wdz.$$

Donc cette intégrale est égale à la somme des intégrales prises le long des contours infinitésimaux tracés autour des points de discontinuité que renferme l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{A}} wdz = \int_{c_1} wdz + \int_{c_2} wdz + \cdots + \int_{c_n} wdz .$$

Donc, pour évaluer une intégrale prise le long du contour d'une aire quelconque, il suffit de savoir évaluer une intégrale prise le long d'un contour infinitésimal tracé autour d'un point de discontinuité.

139. Soit c un point de discontinuité de la fonction w, et voyons comment on évaluera l'intégrale *prise autour de ce point*.

Nous pouvons supposer que l'on donne au contour tracé autour de c la forme d'un cercle de centre c et de rayon infiniment petit ρ. Posons alors

$$z - c = \rho e^{i\varphi} .$$

Quand le point z fera le tour du cercle, φ variera seul, et croîtra

de 0 à 2π, si z fait une seule fois le tour de c, comme cela a lieu ici. On aura donc

$$dz = i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi = i(z-c)d\varphi,$$

et par suite

$$\int_c w dz = i\int_0^{2\pi} w.(z-c)d\varphi.$$

140. Supposons premièrement que le produit

$$w.(z-c) = f(z).(z-c)$$

converge vers une limite *finie* F, lorsque $z-c$ tend vers 0, c'est-à-dire que la quantité

$$F = \lim_{\varepsilon=0}\left[\varepsilon.f(c+\varepsilon)\right]$$

ait une valeur *finie*. L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} w.(z-c)\,d\varphi$$

est de la forme

$$\int_0^{2\pi} (X+iY)\,d\varphi,$$

X et Y étant des quantités réelles, dépendantes de la position du point z sur la circonférence, et par suite fonctions de la variable φ et du paramètre infiniment petit ρ. On a donc

$$\int_0^{2\pi} Xd\varphi = 2\pi.\,\mathfrak{M}(X),$$

$$\int_0^{2\pi} Yd\varphi = 2\pi.\,\mathfrak{M}(Y),$$

$\mathfrak{M}(X)$ et $\mathfrak{M}(Y)$ désignant des *valeurs moyennes* de X et de Y. Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} w.(z-c)d\varphi = 2\pi\left[\mathfrak{M}(X) + i\,\mathfrak{M}(Y)\right].$$

Or le second membre a évidemment pour limite $2\pi F$, lorsqu'on y fait converger ρ vers zéro, ou z vers c. Donc

(2) $$\int_c w dz = 2\pi i.F,$$

en posant

(3) $$F = \lim_{z=0} w(z-c).$$

Cette quantité F est ce que Cauchy appelle le *résidu* de la fonction w relatif au point c. Il s'est servi, pour désigner les résidus, de la caractéristique $\mathcal{E}$, en entourant de doubles parenthèses le facteur de w dont la présence rend cette fonction discontinue au point c. Lorsque ce facteur n'est pas en évidence, on multiplie et l'on divise par ce facteur, de sorte que la quantité F est représentée, d'après Cauchy, par la notation

$$\mathcal{E}\frac{w(z-c)}{((z-c))}.$$

Nous proposerons de simplifier un peu cette notation, en suivant la même convention que nous employons déjà pour les intégrales prises le long d'un contour donné ou autour d'un point donné; et nous représenterons le résidu de la fonction w relatif au point c par la notation

$$\mathcal{E}_c w.$$

On aura, d'après cela, au lieu des formules (2) et (3), les formules

$$(4) \qquad \int_c wdz = 2\pi i . \mathcal{E}_c w,$$

$$(5) \qquad \mathcal{E}_c w = \lim_{z=c} w(z-c).$$

141. Dans le cas où $\lim w(z-c)$ est infinie, nous conserverons encore comme définition du résidu l'équation (4) ou

$$(6) \qquad \mathcal{E}_c w = \frac{1}{2\pi i}\int_c wdz.$$

Mais le calcul de cette quantité ne sera plus aussi simple, l'équation (5) n'ayant plus lieu.

On peut cependant obtenir immédiatement le résidu, lorsque la fonction w est développable en une série convergente, finie ou infinie, ordonnée suivant les puissances entières, négatives, nulles ou positives, de la différence $z-c$.

Supposons, en effet, que l'on ait un développement convergent de la forme

$$w = \cdots + \frac{A_{-m}}{(z-c)^m} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z-c} + A_0 + \cdots + A_n(z-c)^n + \cdots.$$

En posant encore

$$z - c = \rho e^{i\varphi},$$

il vient

$$w = \cdots + \frac{A_{-m}}{\rho^m} e^{-mi\varphi} + \cdots + \frac{A_{-1}}{\rho} e^{-i\varphi} + A_0 + \cdots + A_n \rho^n e^{ni\varphi} + \cdots\cdots$$

En multipliant les deux membres par

$$dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi,$$

et intégrant entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, on a, pour toute valeur de $n \gtreqless 0$, mais différente de -1,

$$\int_0^{2\pi} A_n \rho^n e^{ni\varphi} . i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i A_n \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = 0,$$

tandis que, pour $n = -1$, il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{A_{-1}}{\rho} e^{i\varphi} . i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i A_{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i . A_{-1}.$$

On verrait d'ailleurs, comme au n° 133, que, si R est le reste de la série, l'intégrale $\int_0^{2\pi} R dz$ est infiniment petite en même temps que R. Donc $\int_c w dz$ se réduit à $2\pi i A_{-1}$, d'où

$$\mathcal{E}_c w = \frac{1}{2\pi i} \int_c w dz = A_{-1}.$$

Donc, lorsqu'une fonction w, discontinue au point c, est développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières de $z - c$, et renfermant nécessairement des puissances négatives de $z - c$ (sans quoi elle ne serait pas infinie pour $z = c$), *le résidu de la fonction w relatif au point c sera égal au coefficient de la puissance -1 de $z - c$ dans le développement de w.* Nous verrons plus tard dans quelles conditions ce développement est possible, et comment on en calcule les coefficients.

C'est ce dernier énoncé que Cauchy avait pris pour définition du résidu d'une fonction relatif au point c.

142. D'après cette notation, l'équation (1) du n° 135 devient

$$\int_{\mathfrak{A}} w dz = 2\pi i \left(\mathcal{E}_{c_1} w + \mathcal{E}_{c_2} w + \cdots + \mathcal{E}_{c_n} w \right),$$

ou, par analogie, en représentant par

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}} w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} w dz$$

le *résidu intégral* relatif à l'aire $\mathfrak{A}$,

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}} w = \mathcal{E}_{c_1} w + \mathcal{E}_{c_2} w + \cdots + \mathcal{E}_{c_n} w,$$

ou, plus brièvement,

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}} w = \Sigma_{\mathfrak{A}} \mathcal{E}_c w,$$

le signe de sommation $\Sigma_{\mathfrak{A}}$ s'étendant à tous les points de discontinuité c renfermés dans l'aire $\mathfrak{A}$.

Pour tout point c où la fonction w reste continue, le résidu $\mathcal{E} w$ est nul. On peut donc, sans changer le résidu intégral, y comprendre la somme des résidus relatifs à tous les points de $\mathfrak{A}$ pour lesquels w est continue, et alors le résidu intégral pourra être considéré comme la somme des résidus relatifs à *tous les points* de l'aire $\mathfrak{A}$.

143. De la définition des résidus résultent immédiatement les relations suivantes :

Si l'on suppose tous les résidus relatifs aux mêmes points de discontinuité ou à une même aire, on aura

$$\mathcal{E}(w_1 + w_2 + w_3 + \cdots) = \mathcal{E} w_1 + \mathcal{E} w_2 + \mathcal{E} w_3 + \cdots$$

Si l'on considère une aire comme composée de plusieurs autres (les contours eux-mêmes ne passant par aucun point de discontinuité), on aura

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \cdots} w = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}_1} w + \mathcal{E}_{\mathfrak{A}_2} w + \mathcal{E}_{\mathfrak{A}_3} w + \cdots$$



Si w est le produit de plusieurs fonctions $w_1, w_2, \ldots$, n'ayant pas de points de discontinuité communs, on aura, en adoptant la notation de Cauchy,

$$\mathcal{E}((w_1 w_2 w_3 \cdots)) = \mathcal{E}((w_1)) w_2 w_3 \cdots + \mathcal{E} w_1((w_2)) w_3 \cdots$$
$$+ \mathcal{E} w_1 w_2 ((w_3)) \cdots + \cdots.$$

§ III.

Représentation d'une fonction sous forme de résidu. — Théorèmes de Cauchy et de Laurent.

144. Soit $f(z)$ une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et soit c un point quelconque de l'intérieur de cette aire. La fonction

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-c}$$

sera uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, excepté au point c. Donc l'intégrale $\int F(z)dz$, prise tout le long du contour de $\mathfrak{A}$, se réduira à l'intégrale de la même fonction, prise autour du point c. Or, on a

$$\int_c F(z)dz = 2\pi i. \mathcal{E}_c F(z) = 2\pi i. \lim. (z-c) F(z),$$

pour $z = c$. Il est clair que

$$\lim (z-c) F(z) = \lim f(z) = f(c).$$

On aura donc l'équation fondamentale

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-c} dz = \mathcal{E}_c \frac{f(z)}{z-c},$$

ou, en substituant (n° 138) le contour de l'aire $\mathfrak{A}$ au contour infinitésimal tracé autour du point c,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{z-c} dz = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{z-c}.$$

On conclut de là le théorème suivant :

Si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue

de l'aire $\mathfrak{A}$, et z un point quelconque de l'intérieur de cette aire, la valeur de $f(z)$ en ce point est égale à la valeur du résidu de la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ relatif au point z, de sorte qu'on a

$$(1)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_z \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \mathcal{E}_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

145. La fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est continue sur tout le contour de $\mathfrak{A}$, non seulement par rapport à la variable ζ, mais encore par rapport à la variable z, c'est-à-dire qu'elle varie d'une manière continue, lorsque le point z se déplace d'une manière continue à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. On peut donc la différentier par rapport à z, ce qui donne

$$D_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2},$$

$$\frac{1}{2!} D_z^2 \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3},$$

et, en général,

$$\frac{1}{n!} D_z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

On voit que toutes ces dérivées sont également continues tout le long du contour de $\mathfrak{A}$.

146. Cela posé, soit $F(\zeta, z)$ une fonction des variables ζ et z, continue par rapport à chacune d'elles tout le long du contour de $\mathfrak{A}$. L'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} F(\zeta, z)\,d\zeta$$

sera généralement une fonction de z, que nous désignerons par $\psi(z)$. Si l'on change z en $z + dz$, on aura

$$\psi(z + dz) = \int_{\mathfrak{A}} F(\zeta, z + dz)\,d\zeta,$$

d'où

$$\frac{\psi(z+dz)-\psi(z)}{dz}=\int_{\mathfrak{A}}\frac{F(\zeta,z+dz)-F(\zeta,z)}{dz}\,d\zeta.$$

Si l'on suppose maintenant dz infiniment petit, il viendra, à la limite,

$$D_z\psi(z)=\int_{\mathfrak{A}}D_zF(\zeta,z).d\zeta,$$

ce qui montre que la règle ordinaire de la différentiation sous le signe $\int$ s'applique aux intégrales prises le long d'un contour fermé, pourvu que la fonction sous le signe $\int$ et sa dérivée $D_zF(\zeta,z)$ par rapport au paramètre z restent l'une et l'autre finies tout le long de ce contour.

Il résulte de là qu'on peut aussi différentier sous le signe $\mathcal{E}$, de sorte que l'on aura

$$D_z\mathcal{E}_{\mathfrak{A}}F(\zeta,z)=\mathcal{E}_{\mathfrak{A}}D_zF(\zeta,z),$$

et que, si z est le point de discontinuité de la fonction $F(\zeta,z)$,

$$D_z\mathcal{E}_zF(\zeta,z)=\mathcal{E}_zD_zF(\zeta,z).$$

En appliquant cette formule à la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, on tirera des équations (1) et (2) les relations

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
f'(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}=\mathcal{E}_z\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2},\\
\frac{f''(z)}{2!}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^3}=\mathcal{E}_z\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{f^{(n)}(z)}{n!}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}=\mathcal{E}_z\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}.
\end{aligned}\right.$$

147. Ces relations conduisent d'abord à une conséquence importante. Les fonctions sous le signe $\int$, dans les seconds membres des formules (3), étant toutes finies et continues, toutes les fois que z est un point de l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, les intégrales auront toutes des valeurs finies. Donc toutes les dérivées de $f(z)$ sont des quantités finies.

Il s'ensuit de là qu'elles sont aussi continues. Car $f^{(n+1)}(z)$ étant une quantité finie, l'accroissement

$$f^{(n)}(z+dz)-f^{(n)}(z)=\left[f^{(n+1)}(z)+\varepsilon\right]dz$$

(ε désignant un infiniment petit) sera infiniment petit en même temps que dz, d'où l'on conclut que la fonction $f^{(n)}(z)$ est continue. Il en sera de même, dès lors, pour toutes les dérivées précédentes.

Donc, *si une fonction est uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire* $\mathfrak{A}$, *toutes les dérivées de la fonction seront aussi des fonctions uniformes et continues dans toute l'étendue de la même aire.*

Il en sera de même aussi (nº 107, *remarque*) pour toutes les dérivées partielles de la partie réelle et de la partie imaginaire de $f(z)$.

148. Soient W et w deux fonctions quelconques de z, uniformes et continues l'une et l'autre dans l'aire $\mathfrak{A}$. Il en sera de même de leurs dérivées, et, par suite, du produit

$$W.\mathrm{D}_z w.$$

Donc *l'intégrale*

$$\int_{\mathfrak{A}}^{\cdot} W.\mathrm{D}_z w.dz=\int_{\mathfrak{A}}^{\cdot} Wdw,$$

prise le long du contour de l'aire, est nulle.

149. Soit c un point de l'aire $\mathfrak{A}$. De l'identité

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)}$$
$$=\frac{1}{\zeta-c}+\frac{z-c}{(\zeta-c)^2}+\cdots+\frac{(z-c)^{n-1}}{(\zeta-c)^n}+\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^n(\zeta-z)}$$

on tire, en multipliant par $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)\,d\zeta$, et intégrant tout le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$,

$$(4)\quad \begin{cases} f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} \\ \quad =A_0+A_1(z-c)+A_2(z-c)^2+\cdots+A_{n-1}(z-c)^{n-1}+\Omega_n, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - c} = \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - c},$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^2} = \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^2},$$

. . . .

$$A_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^n} = \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^n},$$

et

(5) $$\Omega_n = \frac{1}{2\pi i}\cdot(z-c)^n \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta)}{(\zeta - c)^n(\zeta - z)}.$$

Des équations (2) et (3), il résulte que l'on a

(6) $$A_0 = f(c),\quad A_1 = \frac{f'(c)}{1},\ \ldots,\ A_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}.$$

Donc

(7) $$f(z) = f(c) + \frac{f'(c)}{1}(z-c) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(z-c)^{n-1} + \Omega_n,$$

et c'est dans cette relation que consiste le THÉORÈME DE CAUCHY, qui contient comme cas particulier celui de Taylor.

Si le terme complémentaire Ω_n est infiniment petit pour n infini, la formule (4) ou (7) donne alors le développement de la fonction $f(z)$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la différence $z - c$. Cette série coïncide avec la série de Taylor dans le cas particulier de z et de c réels.

150. Supposons que l'aire $\mathfrak{A}$, à l'intérieur de laquelle la fonction $f(z)$ reste uniforme et continue, soit un cercle de rayon R, décrit du centre c, et posons

$$\zeta - c = Re^{i\varphi},$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{\zeta - c} = i\,d\varphi.$$

On aura alors

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, d\varphi,$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{-i\varphi}\, d\varphi,$$

. . . .

$$A_{n-1} = \frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{-(n-1)i\varphi}\, d\varphi,$$

où il faudra remplacer ζ par $c + Re^{i\varphi}$. En faisant, de plus,

$$z - c = re^{i\varphi},$$

on aura

$$\Omega_n = \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{ni\varphi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{e^{ni\varphi}\,(\zeta - z)}.$$

Dans cette intégrale, la quantité sous le signe $\int$ est finie en tout point du contour, puisque le point z est intérieur à l'aire. Donc l'intégrale a toujours une valeur finie. D'autre part, le facteur $\left(\frac{r}{R}\right)^n$, en dehors du signe $\int$, est infiniment petit pour n infini, puisque, pour tout point z intérieur au cercle, on a $r < R$. Donc Ω_n est infiniment petit pour n infini. De là ce théorème :

Pour qu'une fonction $f(z)$ soit développable suivant les puissances entières et positives de la différence $z - c$, il suffit que le point z soit intérieur à un cercle décrit du point c comme centre, avec un rayon tel que la fonction $f(z)$ soit uniforme et continue en tout point intérieur à ce cercle.

En d'autres termes, *il suffit que le module de $z - c$ soit inférieur à la distance du point c au point le plus voisin de c, pour lequel la fonction cesse d'être uniforme et continue.*

Le cercle décrit du centre c et passant par le point de discontinuité le plus voisin, s'appelle le *cercle de convergence* de la série.

151. Supposons maintenant que l'on donne les valeurs de la fonction pour une suite continue de points formant un élément, superficiel ou linéaire, aussi petit que l'on voudra, et soient c, c', c'', ... des points de cet élément infiniment voisins.

La dérivée d'une fonction de z étant indépendante de la direction de l'accroissement infiniment petit de z qui entre dans le rapport différentiel, on peut toujours supposer que les accroissements de z ont lieu sur l'élément considéré. On connaîtra dès lors, pour $z = c$, les valeurs de la fonction et de ses dérivées d'ordre quelconque,

$$f(c),$$

$$f'(c) = \lim \frac{f(c') - f(c)}{c' - c}, \quad f'(c') = \lim \frac{f(c'') - f(c')}{c'' - c'},$$

$$f''(c) = \lim \frac{f'(c') - f'(c)}{c' - c}, \text{ etc.}$$

En appliquant la formule (5), on obtiendra le développement de la fonction suivant les puissances de $z - c$, pour toutes les valeurs de z renfermées dans le cercle de convergence décrit du centre c.

Prenons actuellement pour nouveau centre un point c_1, intérieur au cercle $\mathfrak{C}$, mais aussi voisin que l'on voudra de la circonférence de ce cercle, et décrivons de ce centre c_1 un nouveau cercle de convergence $\mathfrak{C}_1$, qui comprendra, en général, des points extérieurs au cercle $\mathfrak{C}$. On obtiendra ainsi, pour tous les points intérieurs à $\mathfrak{C}_1$, un développement suivant les puissances entières et positives de $z - c_1$.

En prenant de même, pour nouveau centre, un point c_2 intérieur à $\mathfrak{C}_1$, on décrira de ce point un nouveau cercle de convergence $\mathfrak{C}_2$, qui comprendra une nouvelle portion de plan, et l'on pourra, à l'intérieur de $\mathfrak{C}_2$, développer la fonction suivant les puissances de $z - c_2$.

En continuant de cette manière, on pourra embrasser, dans l'ensemble de ces cercles, passant entre les points de discontinuité, tous les points z du plan que l'on voudra, et alors, pour chacun de ces points, on aura un développement de la fonction donnée en série convergente. On aura même plusieurs développements pour les points qui seront intérieurs à la fois à plusieurs cercles de convergence.

On déduit de là ce théorème : *Si une fonction $f(z)$ doit rester uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$ (sauf pour certains points désignés, où elle peut devenir discontinue), cette fonction sera complètement déterminée dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, dès que l'on connaîtra les valeurs qu'elle prend en tous*

points d'un élément fini quelconque, superficiel ou linéaire, situé dans cette aire, et aussi petit que l'on voudra.

152. Si la fonction $f(z)$ doit rester constante dans l'élément considéré, alors, en désignant encore par c, c', c'', ... des points consécutifs pris sur cet élément, on aura $f(c') = f(c)$, d'où

$$f'(c) = \lim \frac{f(c') - f(c)}{c' - c} = 0,$$

et de même

$$f'(c') = 0,$$

ensuite

$$f''(c) = \lim \frac{f'(c') - f'(c)}{c' - c} = 0 \ ,$$

puis, de la même manière,

$$f'''(c) = 0, \quad f^{\text{IV}}(c) = 0, \ \ldots,$$

et ainsi de suite, aussi loin qu'on voudra.

Si l'on prend maintenant le point c pour centre du cercle de convergence renfermé dans l'aire $\mathfrak{A}$ considérée, la formule de développement (7) se réduira à

$$f(z) = f(c) + \Omega_n,$$

quelque grand que soit n; et comme Ω_n est infiniment petit pour n infini, il en résulte que l'on a rigoureusement

$$f(z) = f(c) = \text{constante},$$

dans toute l'étendue du cercle de convergence.

En raisonnant maintenant comme au nº 151, on étendra successivement la démonstration à toute l'aire $\mathfrak{A}$.

Donc *une fonction uniforme et continue à l'intérieur d'une aire* $\mathfrak{A}$ *ne peut rester constante sur un élément fini quelconque, superficiel ou linéaire, situé dans cette aire et aussi petit que l'on voudra, à moins que cette fonction ne se réduise à une constante dans toute l'étendue de l'aire.*

Il en résulte immédiatement que deux fonctions uniformes et continues ne peuvent être égales sur un élément fini sans l'être dans toute l'aire.

153. Dans l'évaluation des intégrales qui représentent les coefficients (n° 150), on peut substituer au contour du cercle de convergence celui d'un cercle de même centre et de rayon moindre, et la valeur d'un coefficient quelconque

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+Re^{i\varphi})\,d\varphi}{R^n e^{in\varphi}}$$

n'en sera pas altérée. On voit donc que cette intégrale est indépendante de la valeur du module R, tant que ce module n'atteint pas le rayon du cercle de convergence.

154. *Théorème de Laurent.* Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit uniforme et continue dans l'espace annulaire renfermé entre les contours de deux aires $\mathfrak{A}$ et a, intérieurs l'un à l'autre. Si l'on parcourt les deux contours dans le sens direct relativement aux deux aires $\mathfrak{A}$ et a, comprises dans l'intérieur de ces contours, le sens direct pour l'aire a sera le sens rétrograde pour le contour intérieur de l'aire à connexion double $\mathfrak{A}-\mathrm{a}$, et l'on aura

$$\int_{\mathfrak{A}-\mathrm{a}} = \int_{\mathfrak{A}} - \int_{\mathrm{a}} .$$

Si donc z est un point de l'aire annulaire $\mathfrak{A}-\mathrm{a}$, nous aurons

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\mathrm{a}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right),$$

d'où, en différentiant par rapport à z,

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} - \int_{\mathrm{a}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\right).$$

155. Supposons maintenant que les deux contours soient deux cercles, de centre commun c, et de rayons R et r. Nous aurons identiquement

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = i\int_0^{2\pi} f(\zeta)d\zeta\left[1 + \frac{z-c}{\zeta-c} + \cdots + \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^{n-1} + \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n-1}(\zeta-z)}\right]$$

$$= 2\pi i\left[A_0 + A_1(z-c) + \cdots + A_{n-1}(z-c)^{n-1} + \Omega_n\right],$$

en posant toujours, pour $\zeta = c + Re^{i\varphi}$.

(2) $$A_k = \frac{1}{2\pi R^k}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{-ki\varphi}\, d\varphi,$$

(3) $$\Omega_n = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{ni\varphi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{e^{ni\varphi}\,(\zeta - z)}.$$

Pour la seconde intégrale de la formule (1), on a identiquement

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-c)-(\zeta-c)}$$
$$= -\left[\frac{1}{z-c} + \frac{\zeta-c}{(z-c)^2} + \cdots + \frac{(\zeta-c)^{m-1}}{(z-c)^m} + \frac{(\zeta-c)^m}{(z-c)^m\,(z-\zeta)}\right],$$

d'où, en faisant

$$\zeta - c = \mathrm{r}e^{i\varphi},$$
$$d\zeta = i(\zeta - c)\, d\varphi,$$

il vient

$$-\int_a \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = i\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi\left[\frac{\zeta-c}{z-c} + \frac{(\zeta-c)^2}{(z-c)^2} + \cdots + \frac{(\zeta-c)^m}{(z-c)^m}\right]$$
$$= 2\pi i\left[\frac{A_{-1}}{z-c} + \frac{A_{-2}}{(z-c)^2} + \cdots + \frac{A_{-m}}{(z-c} + \omega_m\right],$$

en posant, pour $\zeta = c + \mathrm{r}e^{i\varphi}$,

(4) $$A_{-k} = \frac{\mathrm{r}^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{ki\varphi}\, d\varphi,$$

(5) $$\omega_m = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\mathrm{r}}{r}\right)^m e^{-mi\varphi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, e^{mi\varphi}\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Le point $z = re^{i\varphi} + c$ étant situé extérieurement au cercle de rayon r, on a $\frac{\mathrm{r}}{r} < 1$, et on en conclura, comme on l'a déjà fait pour l'expression de Ω_n, que ω_m est infiniment petit pour m infini.

Donc, si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans l'aire comprise entre deux cercles de centre commun c et de rayons r et R, la fonction sera développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de la différence $z - c$, et dans laquelle le coefficient $A_{\pm k}$ de la puissance, positive ou négative, $(z-c)^{\pm k}$ est déterminé par les formules (2) et (4).

Remarquons que l'on peut réduire ces deux formules à une seule. En effet, l'intégrale

$$\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^{k+1}}$$

est la même, quel que soit le contour fermé (tracé à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$—a et n'entourant qu'une seule fois le cercle a) le long duquel on prenne cette intégrale. On peut donc la prendre indifféremment soit le long du cercle extérieur, soit le long du cercle intérieur, soit le long d'un cercle intermédiaire quelconque de rayon ρ. D'après cela, on pourra, dans les formules (2) et (4), remplacer R et r par ρ, et l'on aura alors, pour toute valeur positive, nulle ou négative de l'indice k,

$$(6) \qquad A_k = \frac{1}{2\pi\rho^k} \int_0^{2\pi} f(c + \rho e^{i\varphi})\; e^{-ki\varphi}\, d\varphi.$$

156. Si la fonction $f(\zeta)$ était uniforme et continue en tout point de l'aire du cercle intérieur, il en serait de même de la fonction $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, pour toute valeur de z intérieure à ce cercle. Donc alors la seconde intégrale de la formule (1),

$$\int_{\mathrm{a}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

s'évanouirait, et avec elle la partie du développement qui contient les puissances négatives de $z - c$. On retomberait alors sur le théorème de Cauchy.

Si l'on suppose, au contraire, la fonction $f(z)$ uniforme et continue pour tous les points en dehors du cercle intérieur, on pourra supposer le rayon R du cercle extérieur infini. Mais alors, dans l'expression (3) de Ω_n (nº 155), $f(\zeta)$ convergeant vers une valeur nulle ou finie, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{e^{ni\varphi}(\zeta - z)}$$

ne deviendra pas infinie, tandis que le facteur $\left(\frac{\mathrm{r}}{R}\right)^n$ tendra vers zéro. Donc Ω_n sera nul, quel que soit n, et en particulier pour

$n = 1$. Donc la partie de la série correspondante aux puissances positives de $z - c$ se réduira à son premier terme

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\, d\varphi,$$

lequel s'annulera lui-même, si $f(\infty) = 0$. Alors le développement ne contiendra que des puissances négatives de $z - c$.

157. Considérons, par exemple, la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)},$$

où l'on suppose $\operatorname{mod} a < \operatorname{mod} b$. Si l'on décrit deux cercles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ayant pour centre l'origine, et passant par les points a et b $f(z)$ sera uniforme et continue dans l'intérieur du cercle $\mathfrak{A}$. Elle sera donc développable, pour toute valeur de z intérieure à ce cercle, en une série ordonnée suivant les puissances positives de z.

Dans l'intervalle des deux cercles, la fonction sera développable, par le théorème de Laurent, en une série contenant à la fois des puissances positives et des puissances négatives de z.

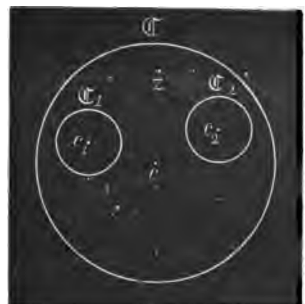
Enfin, pour une valeur de z extérieure au cercle $\mathfrak{B}$, la fonction $f(z)$ sera uniforme et continue, quelque grand que soit le module de z. Le développement ne contiendra donc plus que des puissances négatives de z, le terme constant étant nul, puisque $f(\infty)$ a pour valeur zéro.

158. Le théorème de Laurent est un cas particulier d'une formule plus générale.

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ les points de discontinuité de la fonction uniforme $f(z)$, renfermés dans l'aire $\mathfrak{A}$, et supposons que l'on ait tracé dans cette aire un cercle $\mathfrak{C}$ (*fig.* 31), de centre quelconque c, qui renferme dans son intérieur tous ces points de discontinuité. Décrivons, de plus, de ces points comme centres, des cercles $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\mu$, assez petits pour être tous extérieurs les uns aux autres et intérieurs au cercle $\mathfrak{C}$.

La fonction $f(z)$ sera uniforme et continue dans tout l'espace

Fig. 31.



$$\Gamma = \mathfrak{C} - (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_\mu)$$

compris entre tous ces cercles, et si c désigne un point quelconque de cet espace Γ, il viendra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Or, on aura, comme au n° 154,

$$\int_\Gamma = \int_{\mathfrak{C}} - \left(\int_{\mathfrak{C}_1} + \int_{\mathfrak{C}_2} + \cdots + \int_{\mathfrak{C}_\mu}\right).$$

De plus, dans $\int_{\mathfrak{C}}$, le module de $\zeta - c$ étant plus grand que celui de $z - c$, on en conclura, comme au n° 149,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = A_0 + A_1(z-c) + \cdots + A_{n-1}(z-c)^{n-1} + \Omega_n,$$

Ω_n étant infiniment petit pour n infini, et chaque coefficient A_k étant donné par la formule

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^{k+1}}.$$

Dans $\int_{\mathfrak{C}_h}$, au contraire, le module de $\zeta - c_h$ étant plus petit que celui de $z - c_h$, on en conclura, comme au n° 155,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_h} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{A_1^{(h)}}{z - c_h} + \cdots + \frac{A_m^{(h)}}{(z - c_h)^m} + \omega_m,$$

ω_m étant infiniment petit pour m infini, et chaque coefficient $A_k^{(h)}$ donné par la formule

$$A_k^{(h)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} f(\zeta)(\zeta - c_h)^{k-1}\,d\zeta.$$

Comme on peut prendre les rayons des cercles $\mathfrak{C}_h$ aussi petits que l'on voudra, il s'ensuit que, pour tout point z, pris à l'intérieur du

cercle $\mathfrak{C}$, et autre que les points de discontinuité, on pourra développer la fonction en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la différence $z-c$, et suivant les puissances entières et négatives des différences

$$z-c_1, \quad z-c_2, \ldots, z-c_\mu;$$

de sorte que l'on obtiendra un développement de la forme

$$\begin{aligned} f(z) = A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \cdots \\ + \frac{A'_1}{z-c_1} + \frac{A'_2}{(z-c_1)^2} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{A_1^{(\mu)}}{z-c_\mu} + \frac{A_2^{(\mu)}}{(z-c_\mu)^2} + \cdots. \end{aligned}$$

159. Les théorèmes précédents peuvent s'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

Soit une fonction $f(z, z')$ des variables z, z', uniforme et continue par rapport à chacune de ces variables dans l'intérieur d'une aire $\mathfrak{A}$. En appliquant la formule du n° 144, on aura

$$f(z, z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta, z')}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

On a d'ailleurs, d'après la même formule,

$$f(\zeta, z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta, \zeta')}{\zeta' - z'}\, d\zeta'$$

Donc

$$f(z, z') = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\mathfrak{A}}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta, \zeta')}{(\zeta - z)(\zeta' - z')} d\zeta d\zeta'.$$

On étendrait de même la formule au cas d'un nombre quelconque de variables.

On en tirerait ensuite la généralisation du théorème de Taylor pour le cas de plusieurs variables.

CHAPITRE III.

ÉTUDE D'UNE FONCTION UNIFORME DANS LE VOISINAGE DES POINTS OU ELLE DEVIENT NULLE OU INFINIE.

§ Ier.

Indice d'une fonction en un point donné.

160. Soit $f(z)$ une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et n'ayant dans toute cette aire qu'un seul *zéro*, pour $z=c$. Si l'on désigne par μ un nombre entier quelconque, l'expression

$$\frac{f(z)}{(z-c)^{\mu}}$$

sera uniforme et continue dans toute l'aire, excepté peut-être au point c. Si μ est très-petit, ce rapport pourra s'annuler en c; si μ est très-grand, il pourra devenir infini.

La fonction $f(z)$ étant uniforme et continue dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, on pourra développer $f(z)$ comme au n° 149, et l'on aura

$$f(z)=A_0+A_1(z-c)+\cdots+A_{n-1}(z-c)^{n-1}+\Omega_n,$$

en posant

$$A_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-c)^{k+1}}=\frac{f^{(k)}(c)}{k!},$$

$$\Omega_n=\frac{1}{2\pi i}(z-c)^n\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^n(\zeta-z)}.$$

Le premier terme,

$$A_0=f(c),$$

est nul, par hypothèse. Il peut se faire que quelques-uns des coefficients suivants,

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots,$$

s'annulent également. Mais il y aura nécessairement quelqu'un de

ces coefficients qui différera de zéro, sans quoi $f(z)$, se réduisant à Ω_n, quel que fût n, serait infiniment petit pour n infini, ce qui veut dire que cette fonction ne pourrait avoir qu'une valeur rigoureusement nulle pour tout point de l'intérieur du cercle, et par suite de l'aire $\mathfrak{A}$ tout entière.

Soit A_m le premier coefficient qui ne s'annule pas, ou, ce qui revient au même, soit $f^{(m)}(c)$ le premier terme de la suite

$$f(c), \quad f'(c), \quad f''(c), \ldots,$$

qui soit différent de zéro. On pourra alors écrire

$$f(z) = \Omega_m = A_m (z-c)^m + \Omega_{m+1},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-c)^m \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-c)^m (\zeta-z)} \\ &= A_m (z-c)^m + (z-c)^{m+1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-c)^{m+1} (\zeta-z)}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{(z-c)^m} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-c)^m (\zeta-z)} \\ &= A_m + (z-c) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-z)^{m+1} (\zeta-z)}. \end{aligned}$$

La première expression montre que la valeur de la quantité $\frac{f(z)}{(z-c)^m}$ est finie, quel que soit le point z pris à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$.

La seconde expression montre que cette valeur se réduit à A_m pour $z = c$; par conséquent cette valeur n'est pas nulle pour $z = c$.

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, ayant un seul zéro au point c, il existera une certaine puissance,* ENTIÈRE ET POSITIVE,

$$(z-c)^m,$$

de la différence $z-c$, telle que la limite du rapport

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m}\ .$$

pour $z=c$, sera finie et différente de zéro; d'où il suivra que la fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m}=E(z)$$

sera uniforme, continue et différente de zéro pour tous les points de l'aire $\mathfrak{A}$.

L'exposant m est l'indice de la première des dérivées

$$f'(z),\quad f''(z),\ldots,$$

qui ne s'annule pas avec $f(z)$ pour $z=c$.

On voit que, dans cette hypothèse, la fonction $f(z)$ pourra toujours se mettre sous la forme

$$f(z)=(z-c)^m\ E(z),$$

$E(z)$ étant une fonction de z uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

161. Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit uniforme et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et qu'elle soit continue en chaque point de cette aire, excepté au point $z=c$, où elle présente un infini de première espèce. Alors, d'après ce que nous avons vu (n° 113), la fonction $\frac{1}{f(z)}$ sera uniforme et continue dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, et ne s'annulera qu'au point $z=c$. Donc, en vertu de ce qui vient d'être dit, on pourra poser

$$\frac{1}{f(z)}=(z-c)^m(Fz),$$

$F(z)$ étant une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$; et, comme la fonction réciproque

$$\frac{1}{F(z)}=E(z)$$

jouit évidemment des mêmes propriétés, il en résulte que la fonction proposée pourra se mettre sous la forme

$$f(z)=(z-c)^{-m}E(z),$$

m étant un nombre entier et positif, et $E(z)$ une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Enfin, si la fonction $f(z)$ est elle-même uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, on pourra la mettre, par analogie, sous la forme

$$f(z) = (z-c)^0 E(z),$$

c étant un point quelconque de l'aire.

162. Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$, et si elle est continue et différente de zéro en tout point de cette aire, excepté au seul point c, où cette fonction peut devenir nulle ou infinie (de première espèce), cette fonction pourra, dans toute l'étendue de l'aire, se mettre sous la forme*

$$f(z) = (z-c)^m E(z),$$

$E(z)$ étant une fonction uniforme, continue et différente de zéro en chaque point de $\mathfrak{A}$ sans exception, et m étant un nombre ENTIER, *positif, négatif ou nul, suivant que $f(c)$ sera nul, ou infini, ou fini et différent de zéro.*

Ce nombre m s'appelle l'*indice* de la fonction $f(z)$ au point c.

On voit que l'indice d'une fonction exprime l'ordre infinitésimal de cette fonction au point considéré c, où cet ordre peut être différent de zéro dans l'aire $\mathfrak{A}$.

La valeur de $E(z)$, en un point z infiniment voisin de c, étant infiniment peu différente de $E(c)$, il s'ensuit de là que, dans le voisinage de c, les deux fonctions

$$f(z) \quad \text{et} \quad (z-c)^m E(c)$$

ont pour limite de rapport l'unité. C'est ce que l'on exprime en disant que $f(z)$, *dans le voisinage du point c, varie comme la fonction $(z-c)^m E(c)$; ou encore qu'il varie proportionnellement à $(z-c)^m$.*

163. De l'équation $f(z) = (z-c)^m E(z)$ on tire

$$f'(z) = (z-c)^{m-1}\left[(z-c)E'(z) + mE(z)\right],$$

et comme $E'(z)$ est fini et continu dans le voisinage de c (n° 147), cette expression pourra se mettre sous la forme

$$f'(z) = (z-c)^{m-1} E_1(z),$$

$E_1(z)$ ne devenant ni nul ni infini pour $z = c$. Donc *l'indice de la dérivée d'une fonction qui devient nulle ou infinie en un point c est égal à l'indice de la fonction diminué d'une unité.*

Cette règle ne s'appliquerait plus si l'indice m était 0.

Il résulte de là que, *si une fonction est infinie en un point c, toutes ses dérivées successives sont infinies au même point.*

164. Comme toute fonction rationnelle se forme au moyen des trois opérations d'addition (comprenant la soustraction), de multiplication et de division, il suffit, pour avoir l'indice d'une fonction rationnelle, en un point, de connaître les indices en ce point des différentes fonctions dont elle est composée.

Soient f_1, f_2 deux fonctions d'indices m_1, m_2 au point c, continues et différentes de zéro en tout autre point de l'aire $\mathfrak{A}$; et a_1, a_2 deux constantes qui ne sont ni nulles ni infinies. La fonction

$$F = a_1 f_1 + a_2 f_2$$

pourra, suivant ce que nous venons de voir, se mettre sous la forme

$$F = a_1 (z-c)^{m_1} E_1 + a_2 (z-c)^{m_2} E_2,$$

E_1, E_2 étant deux fonctions continues et différentes de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Soit maintenant μ un nombre entier et fini quelconque, tel qu'aucune des deux sommes $\mu + m_1$, $\mu + m_2$ ne soit négative. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $(z-c)^{\mu}$, il vient

$$(z-c)^{\mu} F = z_1 (z-e)^{\mu+m_1} E_1 + a_2 (z-c)^{\mu+m_2} E_2.$$

Chacun des deux termes du second membre étant une fonction uniforme et continue dans le voisinage du point c, il en sera évidemment de même du premier membre

$$(z-c)^{\mu} F.$$

Or, ce produit est lui-même d'un certain ordre ν ; de sorte que l'on a, ν étant entier, et G désignant une fonction uniforme, continue et différente de zéro,

$$(z-c)^{\mu} F = (z-c)^{\nu} G .$$

Donc

$$F = (z-c)^{\nu-\mu} G ,$$

et par suite F est une quantité de l'ordre entier, positif, nul ou négatif, $\nu - \mu$.

La fonction F, si $\nu - \mu > 0$, ou son inverse $\frac{1}{F}$, si $\nu - \mu < 0$, sera continue dans le voisinage de c. Donc le point c est un infini de l'une des deux fonctions F, $\frac{1}{F}$, et l'autre sera alors finie et continue dans le voisinage de c. Donc la fonction F sera continue, ou du moins elle n'aura que des infinis de première espèce [1].

165. Les fonctions

$$\varphi = f_1 \cdot f_2 , \qquad \chi = \frac{f_1}{f_2} ,$$

pourront s'écrire sous la forme

$$\varphi = (z-c)^{m_1+m_2} E_1 . E_2 ,$$
$$\chi = (z-c)^{m_1-m_2} \frac{E_1}{E_2} .$$

$E_1 . E_2$ et $\frac{E_1}{E_2}$ étant des fonctions uniformes, continues et différentes de zéro en tout point de $\mathfrak{A}$, φ et χ auront pour indices respectifs, au point c, $m_1 + m_2$ et $m_1 - m_2$. En tout autre point de $\mathfrak{A}$, φ et χ seront continues et différentes de zéro. Ces fonctions présenteront donc le même caractère que f_1 et f_2, d'être uniformes et continues dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, à l'exception du point c, où elles peuvent avoir un *infini*.

---

(1) F pourrait s'annuler en d'autres points de $\mathfrak{A}$ que le point c. On dirait pour ces points ce qu'on vient de dire pour le point c. Les zéros de F, autres que le point c, seront nécessairement isolés les uns des autres, comme cela résulte de ce que nous avons vu (nº 152), à moins que la fonction F ne se réduise identiquement à zéro.

166. Le caractère des fonctions uniformes, continues et différentes de zéro, à l'exception d'un nombre limité de zéros et d'infinis isolés, ne se perd donc pas, lorsque l'on combine les fonctions par addition, multiplication ou division, de manière à en former une fonction rationnelle quelconque.

En particulier, si l'on considère une fonction de la forme

$$\frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_k}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_k}.$$

les indices des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_k$, au point c, étant

$$m_1, m_2, \ldots, m_k,$$

et ceux des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ au même point étant

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k,$$

l'indice, en ce même point, de la fonction proposée sera

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) - (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k).$$

§ II.

Développement en série d'une fonction uniforme en tout point d'une aire donnée, à l'exception d'un certain nombre d'infinis de première espèce.

167. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des points isolés, pris à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ des entiers positifs quelconques. La fonction

$$(1) \qquad F = (z - c_1)^{m_1} (z - c_2)^{m_2} \ldots (z - c_k)^{m_k}$$

sera uniforme et continue en tout point de $\mathfrak{A}$, et ne s'annulera qu'aux points $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Elle n'aura donc aucun infini, mais seulement des zéros isolés en ces points c. Donc l'indice de cette fonction sera positif aux points c, nul dans tout le reste de l'aire.

Si l'on pose

$$F = (z - c_1)^{m_1} E,$$

il est clair que E sera une fonction uniforme et continue dans toute l'aire $\mathfrak{A}$, et restera différente de zéro dans le voisinage du point c_1. Donc m_1 sera l'indice de F au point c_1. Pareillement, $m_2, \ldots, m_k$ seront les indices de F aux autres points-zéros $c_2, \ldots, c_k$.

Soit maintenant $f = f(z)$ une fonction quelconque, uniforme dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, et continue dans cette même étendue, excepté aux k points $c_1, c_2, \ldots, c_k$, où elle devient infinie. Les indices de f en ces points seront des entiers négatifs,

$$-n_1, -n_2, \ldots, -n_k.$$

En tout autre point de l'aire $\mathfrak{A}$, l'indice de f sera nul ou positif.

Si l'on considère le produit

$$\varphi = F.f,$$

ce produit sera uniforme et continu en tout point de $\mathfrak{A}$ autre que les points c. En un point c, l'indice de ce produit sera $m - n$. En tout autre point, l'indice sera égal à celui de f, et, par suite, nul ou positif.

Si donc on prend les indices $m_1, m_2, \ldots, m_k$ respectivement égaux à $n_1, n_2, \ldots, n_k$, les indices du produit φ aux points $c_1, c_2, \ldots c_k$, seront tous nuls, et, par suite, la fonction φ sera finie et continue en ces points c, comme en tout autre point de l'aire $\mathfrak{A}$.

Donc, si la fonction f est discontinue seulement aux points $c_1, c_2, \ldots, c_k$, et que les indices correspondants soient $-n_1$, $-n_2, \ldots, -n_k$, le produit

$$\varphi = (z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k} f(z)$$

sera une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

On pourra développer cette fonction par le théorème de Cauchy dans l'intérieur d'un cercle tracé dans l'aire $\mathfrak{A}$ autour d'un centre quelconque γ, et l'on aura ainsi

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z-\gamma) + A_2(z-\gamma)^2 + \cdots,$$

en posant

$$A_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(z)dz}{(z-\gamma)^{h+1}} = \mathcal{E}_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-\gamma)^{h+1}}.$$

On a par conséquent, dans l'intérieur du même cercle,

$$f(z) = \frac{A_0 + A_1(z-\gamma) + A_2(z-\gamma)^2 + \cdots}{(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k}}.$$

168. Cette formule nous donne le moyen de calculer le résidu de la fonction $f(z)$ relatif à un de ses points de discontinuité c, d'indice quelconque n. Mettons, en effet, la fonction proposée sous la forme

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-c)^n},$$

$\varphi(z)$ étant une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans le voisinage du point c. On aura alors, dans l'intérieur d'un contour $\mathfrak{A}$, suffisamment restreint, autour du point c,

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \cdots,$$

où l'on a posé (n° 149)

$$A_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^{h+1}} = \frac{\varphi^{(h)}(c)}{h!}.$$

On en tire

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-c)^n} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{z-c} + A_n + \cdots,$$

ce qui donne le développement de $f(z)$ suivant les puissances entières, positives et négatives, de $z-c$. Or, d'après ce que nous avons démontré (n° 141), le résidu de $f(z)$ relatif au point c est le coefficient A_{n-1} de $\frac{1}{z-c}$ dans ce développement. On a donc

$$\mathcal{E}_c f(z) = A_{n-1} = \frac{\varphi^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{\varepsilon=0} \mathrm{D}_\varepsilon^{n-1}\left[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)\right].$$

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme dans le voisinage du point de discontinuité c, et que $-n$ soit l'indice de la fonction en ce point, le résidu de la fonction relatif au point c sera donné par la formule*

$$\mathcal{E}_c f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathrm{D}_\varepsilon^{n-1}\left[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)\right]}{(n-1)!},$$

laquelle comprend comme cas particulier la formule du n° 140, correspondante à $n = 1$.

§ III.

Expression de l'indice d'une fonction au moyen d'un résidu.

169. Soit $f(z)$ une fonction uniforme, continue et différente de zéro en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$, excepté au point c.

Si m est l'indice de $f(z)$ au point c, et que l'on mette $f(z)$ sous la forme

$$(z-c)^m . E,$$

la fonction E et sa valeur réciproque $\frac{1}{E}$ seront l'une et l'autre uniformes et continues en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$. On aura donc (nº 148)

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{1}{E} dE = 0 .$$

Si l'on remplace maintenant E par sa valeur $\frac{f}{(z-c)^m}$, il vient

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{(z-c)^m}{f} \left(\frac{df}{(z-c)^m} - mf . \frac{dz}{(z-c)^{m+1}} \right) = 0,$$

ou

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f} = m \int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z-c} .$$

Or, l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z-c}$ a pour valeur $2\pi i$. Donc, la formule précédente devient

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{df}{f} = \mathcal{E}_c \frac{D_z f}{f} .$$

ou, ce qui est la même chose,

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_c d \log f = \mathcal{E}_c D_z \log f.$$

Donc, *l'indice d'une fonction f en un point c est égal au résidu de la fonction*

$$\frac{D_z f}{f} = D_z \log f$$

relatif au point c, ou, ce qui revient au même, relatif à une aire

quelconque qui ne renferme pas d'autre zéro ou d'autre infini que le point c.

170. Supposons maintenant qu'au lieu d'un seul point c, zéro ou infini, la fonction f ait, à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, k zéros ou infinis,

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_k,$$

et que cette fonction soit uniforme, continue et différente de zéro dans tout le reste de cet aire.

En appliquant à ces divers points ce que nous venons de dire, on aura, pour valeurs de leurs indices respectifs,

$$m_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{df}{f} = \mathcal{E}_{c_1} \mathrm{D}_z \log f,$$
$$m_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{df}{f} = \mathcal{E}_{c_2} \mathrm{D}_z \log f,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si c désigne, au contraire, un point quelconque qui ne soit ni un zéro ni un infini, et pour lequel la fonction reste finie et ne s'annule pas, on aura pour l'indice de ce point,

$$m = 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{df}{f} = \mathcal{E}_{c} \mathrm{D}_z \log f.$$

171. Si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont les différents points de l'aire $\mathfrak{A}$ pour lesquels la fonction f devient nulle ou infinie, la somme des indices de la fonction f en ces divers points n'est autre chose que la somme des résidus de la fonction $\frac{\mathrm{D}_z f}{f}$ dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire le *résidu intégral* de cette fonction relatif à l'aire $\mathfrak{A}$, de sorte qu'on a

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{df}{f} = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \mathrm{D}_z \log f.$$

Ainsi le résidu intégral de la fonction

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{D}_z \log f(z),$$

relatif à l'aire $\mathfrak{A}$, exprime la somme des indices de la fonction

$f(z)$ aux différents points de cette aire pour lesquels la fonction devient nulle et infinie.

Cette somme

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

s'appelle l'*indice intégral* de la fonction relatif à l'aire $\mathfrak{A}$.

L'indice de la fonction étant nul pour tout point qui n'est ni un zéro ni un infini, on peut, sans changer la somme précédente, y introduire la somme des indices de tous les points autres que les zéros et les infinis. On pourra ainsi considérer l'indice intégral comme la somme des indices de la fonction relatifs à *tous les points* de l'aire $\mathfrak{A}$.

172. Considérons maintenant les racines des deux équations

$$f(z) = 0, \qquad f(z) = \infty.$$

Si l'on regarde l'indice de la fonction $f(z)$ en un point c comme le degré de multiplicité de la racine c, pris positivement s'il s'agit d'une racine de l'équation $f(z) = 0$, négativement s'il s'agit d'une racine de l'équation $f(z) = \infty$; l'indice intégral

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

représentera l'excès du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ sur le nombre des racines de l'équation $f(z) = \infty$, dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$. En d'autres termes, M sera égal au nombre des zéros de la fonction $f(z)$ dans l'aire $\mathfrak{A}$, diminué du nombre des infinis de cette même fonction dans la même aire, chaque zéro ou chaque infini comptant pour autant d'unités qu'il y a d'unités dans son indice.

CHAPITRE IV.

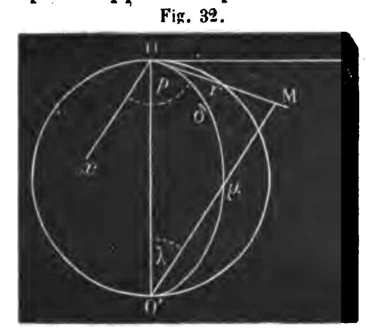
REPRÉSENTATION D'UNE VARIABLE COMPLEXE SUR LA SPHÈRE.

§ Ier.

Passage du plan horizontal à la sphère et au plan antipode.

173. Concevons une sphère de diamètre $= 1$, tangente en l'origine O *(fig. 32)* au plan des coordonnées xOy, *ou plan horizontal*, et située *au-dessous* (1) de ce plan. Soit O′ le point de la sphère *opposé* au point O.

Fig. 32.



Étant donné un point M (x, y) du plan, joignons ce point au point O′. La droite O′ M rencontrera la sphère en un point μ, qui sera complètement déterminé par la position du point M, et *vice versa*. On pourra prendre donc pour *coordonnées* du point μ les coordonnées soit rectangulaires, soit polaires du point M, de sorte que l'expression

$$z = x + iy = r_p$$

représentera indifféremment le point M du plan ou le point μ de la sphère.

A un contour tracé sur le plan correspondra un contour tracé sur la sphère. Les deux contours seront à la fois tous les deux fermés ou tous les deux non fermés; tous les deux à connexion simple, ou tous les deux à connexion multiple et du même degré de multiplicité.

(1) Nous entendons par *dessus* du plan xOy la face de ce plan telle qu'un observateur se tenant debout sur cette face, les pieds sur le plan, doive tourner d'*un* angle droit, *de sa droite vers sa gauche,* pour passer de la direction positive de l'axe des x à la direction positive de l'axe des y. Ce sens de rotation est celui du *mouvement propre annuel* du Soleil pour un habitant de l'hémisphère boréal.

Si le point M s'éloigne à l'infini, la droite $O'\mu M$ tend à devenir parallèle au plan xy, et le point μ se rapproche indéfiniment de O'. Donc, dans ce système, non-seulement chaque valeur finie de x est représentée par un point unique et déterminé de la sphère, mais encore la valeur $z = \infty$ est elle-même représentée par le point unique et déterminé O'.

D'après cela, un contour qui, sur le plan horizontal xy, aurait deux branches infinies, comme une parabole, serait représenté sur la sphère par un contour fermé, passant par le point O. A une hyperbole tracée sur le plan des xy correspondrait sur la sphère une courbe en forme de 8, ayant son point multiple en O'.

174. A tout point du plan horizontal, situé à une distance finie de l'origine O, correspond un point unique de la sphère, et réciproquement.

Si donc une fonction $f(z)$ a une valeur unique en chaque point du plan situé à une distance finie de O, cette fonction aura aussi une valeur unique en chaque point de la sphère qui ne se confond pas avec O'. Donc, pour les valeurs *finies* de z, une fonction uniforme sur le plan est aussi uniforme sur la sphère, et réciproquement.

Pour z fini, à un accroissement infiniment petit de z sur le plan correspond un déplacement infiniment petit du point corrélatif de la sphère, et *vice versa*. Donc, si une quantité varie d'une manière continue sur l'une des deux surfaces, elle variera aussi d'une manière continue sur l'autre surface.

175. Il peut y avoir exception pour les valeurs d'une fonction correspondante à des points de la sphère infiniment voisins du point O' de la sphère, qui représente l'infini. En effet, sur le plan, les valeurs de z de module infini et d'arguments différents vont en divergeant de plus en plus, tandis que les points correspondants de la sphère convergent tous vers le même point O'. Il peut donc se faire qu'une fonction uniforme pour tous les points de la sphère autres que O' devienne multiforme en ce point, où se réunissent des valeurs variables exprimées par des nombres infiniment différents.

Considérons, par exemple, la fonction

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y.$$

Cette fonction ne tend pas vers une limite déterminée pour $z = \infty$. Car, si l'on fait $x = 0$, $y = \infty$, elle tend vers $\infty \times i$; si l'on fait $x = \infty$, $y = 0$, elle tend vers $\sin \infty$, quantité réelle, comprise entre -1 et $+1$, mais complètement indéterminée entre ces deux limites. Or, sur la sphère, ces deux valeurs de z sont représentées l'une et l'autre par le point O'. Donc en O' la fonction $\sin z$ n'est plus uniforme et continue, comme elle l'est pour tous les autres points de la sphère. Elle a en O' un point de discontinuité de seconde espèce.

Au contraire, la fonction

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} + \frac{mz}{z^2 + n}$$

tend pour $z = \infty$, vers la limite finie $\frac{a}{c}$, quelles que soient les composantes de z, pourvu que le module soit infini. Donc cette fonction est encore uniforme en O', comme en tous les autres points de la sphère.

176. Si l'on désigne par δ l'arc de grand cercle compris entre le point O et le point z de la sphère, cet arc faisant partie d'un cercle de *diamètre* $= 1$, sa longueur mesurera l'angle $\lambda = z\mathrm{O'O}$, compris entre les directions O'O et O'z. Le module r du point z du plan sera donc égal à

$$\operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} \lambda.$$

Donc le point représenté par re^{ip} sur le plan sera représenté par

$$\operatorname{tang} \delta . e^{ip} = \operatorname{tang} \lambda . e^{ip}$$

sur la sphère. Si r varie d'une manière continue, il en sera de même de δ ou de λ, et réciproquement, sauf le cas de $\delta = \lambda = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire sauf le voisinage de O'.

177. Si l'on fait décrire à z, sur le plan horizontal, un cercle ayant pour équation

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2,$$

la courbe tracée par le z de la sphère sera l'intersection de cette sphère, représentée par l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0,$$

avec le cône

$$(\xi - a\zeta)^2 + \eta^2 - b^2\zeta^2 = 0.$$

On tire de ces deux équations

$$2a\xi + (1 + b^2 - a^2)\zeta = 1,$$

ce qui montre que la courbe d'intersection est plane. Donc le z de la sphère décrit un cercle comme le z du plan; et réciproquement.

178. Imaginons maintenant un plan tangent à la sphère au *pôle inférieur* O′, et joignons le z de la sphère, que nous désignerons par ζ, au *pôle supérieur* O. La ligne Oζ rencontrera le plan inférieur en un point z', qui sera lié avec z et avec ζ, et qui sera déterminé par chacun d'eux, ou le déterminera sans ambiguïté.

Nous avons, entre le module r et l'angle $OO'z = \delta$, la relation

$$r = \text{tang}\,\delta.$$

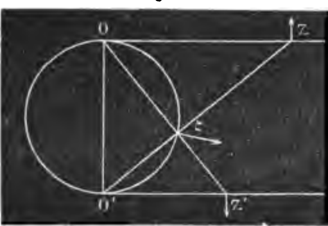
L'angle $O'Oz$ étant égal à $\frac{\pi}{2} - \delta$, le module $O'z'$ aura pour valeur

$$r' = \text{tang}\,O'Oz = \cot\delta = \frac{1}{r}\cdot$$

L'argument sera le même que celui de z, si l'on prend pour cet argument l'angle du plan $O\zeta O'$ avec le méridien fixe passant par Ox, ce qui suppose les faces *supérieures* des deux plans tournées vers la même direction, celle qui va de O′ vers O. Mais il est plus convenable de compter l'argument de z' dans le sens opposé.

Examinons, en effet, par quel procédé de déformation nous pouvons passer le plus simplement du plan supérieur à la sphère, puis de celle-ci au plan inférieur. Imaginons un observateur placé en z, debout sur la face supérieure du plan horizontal (*fig.* 33).

Fig. 33.



Concevons qu'on enroule la ligne Oz sur le méridien $O\zeta O'$, en faisant varier la longueur de cette ligne de manière que chaque point z suive la droite $O'\zeta z$. L'observateur, entraîné dans ce mouvement, se trouvera debout en ζ sur la surface *extérieure* de la sphère.

Déroulons maintenant l'arc $O'\zeta$, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur $O'z'$, en faisant varier sa longueur de manière que le point ζ suive la droite $O\zeta z'$. L'observateur placé en ζ, sur la surface extérieure de la sphère, arrivera en z, la tête tournée vers le bas, en sens inverse du sens dans lequel il se trouvait en z, et dans une position que nous pourrons désigner par le mot d'*antipode*. Nous appellerons alors, par analogie, *plan antipode* le plan inférieur $O'z'$.

Cela posé, pour que, sur le plan antipode, l'axe des y soit situé à un angle droit *au delà* de l'axe des x pour un observateur debout en O' sur la face *inférieure* du plan et tournant *de droite à gauche,* il faudra faire *croître* les azimuts sur ce plan en sens contraire des azimuts sur le plan horizontal. Si l'on désigne donc par p' l'argument de z' compté à partir du même plan fixe que l'argument p de z, il faudra prendre

$$p' = -p.$$

On conclut de là que l'on aura

$$z' = r' e^{ip'} = \frac{1}{r} e^{-ip} = \frac{1}{z}.$$

Ainsi la construction précédente détermine sur le plan antipode une nouvelle variable z', dont la valeur est réciproque de la valeur de z (¹).

179. Étant donc donnée une fonction

$$f(z) = f(re^{ip})$$

de la variable z sur le plan horizontal, on pourra la transformer en une fonction

$$f(\zeta) = f(\operatorname{tang}\delta\,.\,e^{ip}) = f(\operatorname{tang}\delta\,.\,e^{-ip'})$$

de la variable ζ sur la sphère, puis en une fonction

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = f\left(\frac{1}{r'}\,e^{-ip'}\right)$$

de la variable z' sur le plan antipode.

(¹) C'est grâce au sens adopté pour compter les arguments sur le plan antipode que z' est une *fonction* (monogène) de z, et, par suite, que toute fonction de z sera aussi une fonction de z', et *vice versa*.

Lorsque z variera de zéro à l'infini, le point δ passera de O en O', et z' variera de l'infini à zéro. Si l'on fait

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z'),$$

la valeur de $f(z)$ pour $z = \infty$ sera la valeur de $\varphi(z')$ pour $z' = 0$, tandis que, sur la sphère, les valeurs infinies soit de z, soit de z', correspondront toujours à des valeurs finies de la quantité δ et à des points déterminés de la sphère. En rapportant donc la variable à un point de la sphère, on n'aura plus à considérer de points situés à l'infini, et l'on pourra traiter l'infini comme toute autre valeur représentée par un point de la surface sur laquelle se meut la variable.

§ II.

180. Théorème. *Une fonction qui est uniforme, finie et continue dans toute l'étendue de la sphère, se réduit à une constante.*

Pour démontrer cette proposition, mettons la fonction $f(z) = f(x + iy)$ sous la forme $u + iv$, u et v ayant chacun une valeur unique en chaque point du plan horizontal, et par suite en chaque point de la sphère. Nous supposons, de plus, qu'en chaque point de la sphère, u et v soient des fonctions continues des variables δ et p, qui déterminent la position de ce point.

Partageons la sphère en deux parties par une ligne fermée quelconque, qui ne se coupe pas, et de telle sorte que la calotte supérieure renferme le point O, la calotte inférieure le point O'. Nous pourrons transformer tous les points de la calotte supérieure en des points du plan horizontal renfermés dans nne certaine aire $\mathfrak{A}$, et tous les points de la calotte inférieure en des points du plan antipode renfermés dans une aire $\mathfrak{A}'$.

D'après la formule démontrée au n° 137, on aura, sur le plan horizontal,

$$\int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dx\,dy = \int_{\mathfrak{A}} u\,dv,$$

l'intégrale du second membre étant prise dans le sens positif par rapport à l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire en marchant *de l'ouest à l'est* (n° 175, note).

On aura de même, sur le plan antipode,

$$\int\int_{\mathfrak{A}'} [(D_{x'}u)^2 + (D_{y'}u)^2] dx' dy' = \int_{\mathfrak{A}'} udr,$$

l'intégrale du second membre étant prise dans le sens des angles p' croissants, ou dans le sens des angles p décroissants, c'est-à-dire en marchant *de l'est à l'ouest*.

On peut maintenant considérer x, y, ou x', y' comme les *coordonnées tangentielles* d'un point ζ de la sphère. Les fonctions

$$D_x u, \quad D_y u, \quad D_{x'} u, \quad D_{y'} u, \quad u, \quad dr$$

auront les mêmes expressions et les mêmes valeurs, soit qu'on rapporte les coordonnées à un point de l'un des plans, soit qu'on les considère comme déterminant un point de la sphère. On aura donc

$$\int\int_{\mathfrak{A}} [(D_x u)^2 + (D_y u)^2] dx dy + \int\int_{\mathfrak{A}'} [(D_{x'} u)^2 + (D_{y'} u)^2] dx' dy'$$
$$= \int_{\mathfrak{A}} udr + \int_{\mathfrak{A}'} udr,$$

la première intégrale de chaque membre se rapportant à la calotte supérieure, et l'autre à la calotte inférieure.

Or les intégrales $\int_{\mathfrak{A}} udv$, $\int_{\mathfrak{A}'} udv$ sont prises l'une et l'autre le long de la courbe de séparation des deux calottes, laquelle, sur les deux plans, s'était transformée dans les contours des aires $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$. Ces intégrales sont donc composées des mêmes éléments. Mais dans la première le contour est parcouru de l'ouest à l'est, tandis que dans la seconde il est parcouru de l'est à l'ouest. Donc les mêmes éléments sont pris en signe contraire dans ces deux intégrales. Il résulte de là que ces intégrales sont égales et de signe contraire, et que leur somme est nulle. Il en est donc de même aussi pour la somme des intégrales doubles.

Mais ces intégrales doubles sont composées d'éléments qui ne peuvent être négatifs. Donc, pour que leur somme soit nulle, il faut que ces éléments soient nuls séparément, ce qui entraîne les équations

$$D_x u = 0, \qquad D_y u = 0, \qquad D_{x'} u = 0, \qquad D_{y'} u = 0.$$

Donc la fonction u se réduit à une constante dans toute l'étendue de la sphère, et comme on a, en chaque point (n° 102)

$$D_x u = D_y v, \quad D_y u = -D_x v, \quad D_{x'} u = D_{y'} v, \quad D_{y'} u = -D_{x'} v,$$

il en résulte que v doit se réduire aussi à une constante. Donc $f(z)$ se réduit à une constante dans toute l'étendue de la sphère, et par suite aussi dans toute l'étendue du plan [1].

181. Il résulte de là que toute fonction uniforme de z, qui ne se réduit pas à une constante, doit présenter au moins un infini en quelque point de la sphère, et par suite elle doit devenir infinie pour une valeur au moins de z, finie ou infinie.

182. Si la fonction $f(z)$ ne se réduit pas à une constante, il en sera de même de son inverse $\frac{1}{f(z)}$. Donc la fonction $\frac{1}{f(z)}$ devra aussi présenter un ou plusieurs infinis, et par conséquent la fonction $f(z)$ un ou plusieurs zéros.

Donc toute fonction uniforme de z, qui ne se réduit pas à une constante, doit nécessairement présenter, dans l'étendue infinie du plan, un ou plusieurs zéros, et aussi un ou plusieurs infinis.

De plus, si le point O' est un zéro (ou un infini), il faut que la fonction ait en un autre point un infini (ou un zéro). Donc toute fonction uniforme a au moins soit un zéro, soit un infini, situé à une distance finie.

---

[1] On peut encore démontrer ce théorème comme il suit :

La fonction $f(z)$ étant toujours finie et continue, quelque grand que soit z, on aura, en prenant pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon infini, et posant $\zeta = Re^{i\varphi}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,d\varphi}{1 - \dfrac{z}{\zeta}}.$$

Or pour R infini, $f(\zeta)$ restant toujours fini, l'intégrale différera infiniment peu de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi,$$

quantité finie et indépendante de z. Donc $f(z)$ est aussi indépendant de z, et se réduit à une constante.

Il est aisé de voir que cette proposition contient comme cas particulier le théorème, que toute équation algébrique a au moins une racine (nos 74-76).

183. La fonction $f(z) - k$ doit, d'après cela, avoir au moins un zéro. Il s'ensuit de là que *la fonction $f(z)$ passe au moins une fois par une valeur donnée quelconque k.*

Ainsi *toute fonction uniforme dans toute l'étendue de la sphère reçoit nécessairement toutes les valeurs possibles, y compris zéro et l'infini.*

184. Remarquons que les zéros (et les infinis) d'une fonction doivent être nécessairement isolés. Car s'ils étaient infiniment rapprochés, ils formeraient un élément continu, sur lequel la fonction présenterait une valeur constante, et l'on en conclurait alors (n° 152) que la fonction devrait rester constante dans toute l'étendue du plan.

Un infini de première espèce ne peut être non plus à une distance infiniment petite d'un zéro; car alors l'inverse de la fonction serait discontinu en ce point, aussi bien que la fonction elle-même, et l'infini ne serait plus de première espèce.

185. Soit $f(z)$ une fonction finie et continue en tout point de la sphère autre que le point O'. Partageons toujours la sphère en deux calottes, dont l'une contienne O, l'autre O', et transportons tous les points de la calotte inférieure $\mathfrak{A}'$ sur le plan antipode.

La fonction $f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$ sera finie et continue pour toute valeur de z, excepté pour $z' = 0$. Soit $-n$ l'indice de cette fonction pour $z' = 0$. On pourra, d'après ce que nous avons vu, développer la fonction

$$z'^n \varphi(z'),$$

uniforme et continue dans toute l'étendue du plan antipode, en série ordonnée suivant les puissances positives de z', et poser

$$z'^n \varphi(z') = A_0 + A_1 z' + \cdots + A_{n-1} z'^{n-1} + \Omega_n z'^n,$$

Ω_n étant une fonction finie et continue dans toute l'étendue du plan antipode. Donc

$$\varphi(z') = \frac{A_0}{z'^n} + \frac{A_1}{z'^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{z'} + \Omega_n,$$

d'où en remplaçant z' par $\frac{1}{z}$, $\varphi(z')$ par $f(z)$,

$$\Omega_n = f(z) - (A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z),$$

formule vraie sur toute l'étendue de la calotte $\mathfrak{A}'$.

Or la fonction Ω_n est finie et continue sur toute la calotte $\mathfrak{A}'$; elle l'est évidemment aussi sur toute la calotte $\mathfrak{A}$. Donc elle l'est aussi sur toute la sphère, et par conséquent elle se réduit (nº 182) à une constante A_n. On a donc

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n.$$

Donc *une fonction uniforme qui ne devient infinie que pour z infini, et qui, pour toute autre valeur de z, reste finie et continue, est une fonction entière et rationnelle de z, dont le degré est égal à l'indice du point* $z = \infty$.

186. Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ ait des infinis $c_1, c_2, \ldots, c_k$, autres que le point O'. Partageons la sphère, comme précédemment, en deux calottes contenant l'une tous les points c, l'autre le point O', qu'il soit ou non un infini.

Suivant ce qui a été démontré, la fonction pourra se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots}{(z - c_1)^{n_1} (z - c_2)^{n_2} \cdots (z - c_k)^{n_k}},$$

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant les indices des points $c_1, c_2, \ldots, c_k$; de sorte que la fonction

$$F = (z - c_1)^{n_1} (z - c_2)^{n_2} \ldots (z - c)^{n_k} . f(z)$$

sera uniforme et continue dans toute l'étendue de la calotte supérieure.

Elle sera également uniforme et continue en tout point de la calotte inférieure, à l'exception peut-être du point O'. Donc, d'après

ce que nous venons d'établir au numéro précédent, cette quantité F sera une fonction entière et rationnelle de z, d'un degré n marqué par son indice au point O', et, par suite, de la forme

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_0 .$$

Donc la fonction proposée $f(z)$ sera de la forme

$$\frac{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_0}{(z-c_1)^{n_1}(z-c^2)^{n_2}\dots(z-c_k)^{n_k}};$$

le numérateur se réduisant à une constante, si la fonction F est finie en O'.

Donc *toute fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de la sphère, à l'exception d'un nombre limité d'infinis de première espèce, est une fonction rationnelle.*

187. Soient $c_1, c_2, \dots, c_k$ tous les points où une fonction $f(z)$ devient nulle ou infinie sur le plan horizontal; $n_1, n_2, \dots, n_k$ leurs indices, positifs ou négatifs. La fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\cdots(z-c_k)^{n_k}}$$

ne pourra devenir nulle ou infinie en aucun point du plan. Donc elle se réduira à une constante A (n° 184), d'où l'on tire

$$f(z) = A\,(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\dots(z-c_k)^{n_k} .$$

Donc *une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de la sphère, à l'exception d'un nombre limité d'infinis de première espèce, est connue, à un facteur constant près, dès que l'on donne ses zéros et ses infinis avec leurs indices respectifs.*

§ III.

Détermination d'une fonction par des conditions relatives au contour et aux points de discontinuité.

188. Nous avons vu (n° 151) qu'une fonction uniforme et continue dans une aire donnée est déterminée pour toutes les valeurs de la variable comprise dans cette aire, lorsqu'on donne ses valeurs en tout point d'un élément de l'aire aussi petit que l'on voudra.

Nous allons voir comment on peut réduire au strict nécessaire les conditions de la détermination d'une fonction, ce qui conduira aux moyens d'étudier une fonction suffisamment déterminée, sans avoir besoin de connaître son expression analytique.

189. Nous avons vu (n° 151) que si une fonction uniforme et continue w de $z = x + iy$ est donnée pour un élément, superficiel ou linéaire, de l'aire $\mathfrak{A}$, aussi petit que l'on voudra, on obtiendra d'abord l'expression de cette fonction, sous forme de série convergente, pour tous les points de l'intérieur du cercle de convergence qui a son centre en un point quelconque de l'élément; et de là, en s'avançant de proche en proche, on peut déterminer la fonction dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Nous pourrons supposer que l'élément linéaire le long duquel la fonction est donnée est le contour même du cercle de convergence $\mathfrak{C}$, de rayon R et de centre c, ou d'un autre cercle quelconque compris dans le cercle de convergence, et aussi voisin de lui que l'on voudra. Si l'on connaît les valeurs que prend la fonction $f(z)$ en tous les points de la circonférence $\mathfrak{C}$, les formules du n° 154 détermineront les coefficients du développement de $f(z)$, sous forme d'intégrales portant sur des fonctions connues, et ce développement donnera les valeurs de $f(z)$ en un point quelconque de l'intérieur du cercle.

La fonction $w = f(z)$ ainsi déterminée, jouira des propriétés suivantes :

Elle sera continue, ainsi que toutes ses dérivées, pour toute valeur de z intérieure au cercle;

Elle satisfera à l'équation aux dérivées partielles

$$D_x^2 w + D_y^2 w = 0.$$

190. Au lieu de la fonction $w = u + iv$ elle-même, il nous suffira, dans nos recherches, de considérer sa partie réelle u. Cette partie réelle une fois obtenue, les conditions (2) du n° 102, auxquelles le coefficient de i devra satisfaire, nous feront connaître la différentielle

$$dv = D_x v\,dx + D_y v\,dy = - D_y u\,dx + D_x u\,dy,$$

expression intégrable en vertu de la condition

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

On en tirera, par l'intégration, la valeur de v, à une constante réelle près. Enfin cette constante elle-même sera déterminée, si l'on donne la valeur numérique de v en un point quelconque (x_0, y_0) de l'aire considérée.

191. Si dans le développement

$$w = u + iv = A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \cdots,$$

on sépare le réel de l'imaginaire, en faisant

$$A_n = B_n + iC_n, \qquad z-c = re^{ip},$$

on obtiendra le développement de la partie réelle u de w sous la forme

$$\begin{aligned} u = B_0 + B_1 r\cos p + B_2 r^2 \cos 2p + \cdots \\ - C_1 r \sin p - C_2 r^2 \sin 2p - \cdots \end{aligned}$$

En un point du contour de $\mathfrak{C}$, pour $r = R$, cette valeur deviendra

$$\begin{aligned} u_0 = B_0 + B_1 R\cos p + B_2 R^2 \cos 2p + \cdots \\ - C_1 R \sin p - C_2 R^2 \sin 2p - \cdots \end{aligned}$$

Réciproquement, si l'on connaît la valeur u_0 de u en tout point du contour de $\mathfrak{C}$, on aura la valeur de u en un point quelconque $z = c + re^{ip}$ de l'intérieur du cercle, en multipliant les termes du développement de u_0 par les puissances correspondantes de $\frac{r}{R}$.

Les conditions auxquelles satisfait w sont remplies également par la partie réelle u. Ainsi *il existe une fonction réelle u de x et de y satisfaisant aux conditions suivantes :*

I. *Elle prend le long de la circonférence du cercle $\mathfrak{C}$ la même suite de valeurs qu'une fonction donnée u_0, continue en chaque point de cette circonférence;*

II. *En tout point de l'intérieur du cercle, elle est continue, ainsi que toutes ses dérivées partielles;*

III. *Elle vérifie l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad \mathrm{D}_x^2 u + \mathrm{D}_y^2 u = 0.$$

192. Cette fonction u, que nous venons de déterminer, est la

seule qui satisfasse aux conditions du numéro précédent. En effet, reprenons l'intégrale double déjà considérée aux n°s 137 et 180,

$$\Omega(u) = \int_x \int_{\mathfrak{C}}^{\bullet} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2 \right] dx dy ,$$

et soit, s'il est possible, une autre fonction U, satisfaisant comme u aux conditions I, II et III. Nous pourrons représenter cette fonction par $u + \theta$, θ étant une fonction différente de zéro dans tout l'intérieur du cercle, mais s'annulant en tout point de la circonférence, en vertu de la condition I, à laquelle les fonctions u et $u + \theta$ sont supposées satisfaire l'une et l'autre.

De plus, d'après la condition II, θ sera continue, ainsi que toutes ses dérivées. Enfin, d'après la condition III, on devra avoir

$$D_x^2 \theta + D_y^2 \theta = 0.$$

Cela posé, en faisant le même calcul qu'au n° 137, on trouvera

$$\Omega(\theta) = \int_{\mathfrak{C}} \theta \, (D_x \theta \, dy - D_y \theta \, dx),$$

quantité nulle, puisque θ a la valeur constante zéro tout le long du contour de $\mathfrak{C}$.

De la condition $\Omega(\theta) = 0$ il résulte, l'élément de cette intégrale ne pouvant être négatif, que l'on a

$$(D_x \theta)^2 + (D_y \theta)^2 = 0,$$

d'où il s'ensuit que l'on aura en tout point de l'intérieur du cercle

$$D_x \theta = 0, \qquad D_y \theta = 0,$$

et par suite

$$\theta = \text{constante}.$$

Enfin, cette valeur constante elle-même doit être nulle, puisque $\theta = 0$ tout le long du contour. Donc la fonction u, déterminée au numéro précédent, est la seule fonction uniforme qui satisfasse aux conditions I, II et III.

La démonstration précédente subsisterait encore dans le cas où l'on substituerait au cercle $\mathfrak{C}$ une aire quelconque à connexion simple.

193. $\Omega(\theta)$ sera nul toutes les fois que $D_x \theta$ et $D_y \theta$ le seront en

chaque point du contour, c'est-à-dire toutes les fois que la fonction θ aura le long de ce contour une valeur constante. On en conclura alors que θ sera aussi constant dans tout l'intérieur du cercle, et par suite, si θ est la partie réelle d'une certaine fonction ω de $x+iy$, cette fonction elle-même (n° 137) se réduira à une constante dans toute l'étendue de l'aire circulaire. Ainsi une fonction de z, uniforme et continue dans un cercle donné, ou plus généralement dans une aire donnée quelconque à connexion simple, se réduit à une constante toutes les fois que la valeur de sa partie réelle reste constante tout le long du contour de l'aire.

194. Supposons maintenant que la fonction w doive être finie et continue pour toute valeur de z, c'est-à-dire dans toute l'étendue de la sphère. Prenons pour aire $\mathfrak{A}$ la sphère entière moins un cercle infiniment petit de centre quelconque c. La fonction étant continue dans le voisinage de c, sera constante le long de la circonférence infiniment petite qui forme le contour de l'aire. Donc elle sera aussi constante dans tout l'intérieur de l'aire, c'est-à-dire dans toute l'étendue de la sphère.

Nous sommes ainsi ramenés au théorème du n° 180.

195. La fonction unique u, qui satisfait aux conditions I, II et III du n° 190, jouit, de plus, de la propriété de rendre minimum l'intégrale double

$$\Omega(U) = \int\int_{\mathfrak{C}} \left[(D_x U)^2 + (D_y U)^2\right] dxdy,$$

lorsqu'on prend pour U toutes les fonctions uniformes et continues qui satisfont seulement à la condition I, c'est-à-dire qui prennent la valeur u_0 le long de la circonférence du cercle $\mathfrak{C}$.

En effet, comparons les valeurs que prend $\Omega(U)$ lorsqu'on y remplace successivement U par la fonction u satisfaisant aux conditions I et II, et par une fonction quelconque prenant également le long du contour la valeur u_0, et que nous pourrons représenter par

$$u+\theta,$$

θ étant une fonction réelle quelconque, uniforme et continue à l'intérieur de $\mathfrak{C}$, et s'annulant tout le long du contour de $\mathfrak{C}$. Les

dérivées de θ seront continues (n° 147). On trouve, en développant,

$$\Omega(u+\theta) = \int\int_{\mathfrak{C}} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dxdy$$

$$+ 2\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_x u\, D_x\theta + D_y u D_y \theta\right] dxdy + \int\int_{\mathfrak{C}} \left[(D_x\theta)^2 + (D_y\theta)^2\right] dxdy$$

$$= \Omega(u) + \Omega(\theta) + 2\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_x u D_x\theta + D_y u D_y \theta\right] dxdy.$$

Or, à cause de

$$D_x(\theta \,.\, D_x u) = D_x u\, D_x\theta + \theta \,.\, D_x^2 u,$$

on a, par la formule (1) du n° 125,

$$\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_x u\, D_x\theta + \theta \,.\, D_x^2 u\right] dxdy = \int_{\mathfrak{C}} \theta \,.\, D_x u\, dy,$$

et de même, par la formule du n° 126,

$$\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_y u\, D_y\theta + \theta \,.\, D_y^2 u\right] dxdy = -\int_{\mathfrak{C}} \theta \,.\, D_y u\, dx.$$

Donc

$$\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_x u D_x\theta + D_y u D_y\theta\right] dxdy$$

$$= \int_{\mathfrak{C}} \theta\,(D_x u\, dy - D_y u\, dx) - \int\int_{\mathfrak{C}} (D_x^2 u + D_y^2 u)\,\theta\, dxdy.$$

Or, les intégrales du second membre sont nulles, la première parce que θ s'annule tout le long du contour, la seconde par la même raison et aussi parce que u satisfait à la condition III. Donc on aura simplement

$$\Omega(u+\theta) = \Omega(u) + \Omega(\theta).$$

$\Omega(\theta)$ ne peut être négatif. Donc, tant que $\Omega(\theta)$ ne sera pas nul, on aura toujours

$$\Omega(u+\theta) > \Omega(u).$$

On aura

$$\Omega(u+\theta) = \Omega(u)$$

dans le seul cas où $\Omega(\theta)$ sera nul; mais alors, d'après ce que nous avons vu, θ devra lui-même s'annuler, et $u+\theta$ se réduira à u.

Donc, parmi toutes les fonctions U qui satisfont aux conditions I et II, celle qui donnera pour $\Omega(u)$ la valeur minimum sera la fonction unique qui satisfait à la condition III.

C'est d'ailleurs le seul minimum dont l'intégrale $\Omega(U)$ soit susceptible. Car, si l'on part d'une valeur quelconque $\Omega(U) = \Omega(u+\theta) = \Omega(u) + \Omega(\theta)$, et que l'on remplace θ par $h\theta$, h étant une constante moindre que l'unité, on aura

$$\Omega(h\theta) = h^2\Omega(\theta),$$

et par suite

$$\Omega(u + h\theta) = \Omega(u) + h^2\,\Omega(\theta) < \Omega(u+\theta).$$

Donc $U = u + \theta$ ne peut donner un minimum de $\Omega(U)$, si ce n'est pour $\theta = 0$.

196. Passons maintenant au cas général où l'on considère non plus l'aire d'un cercle $\mathfrak{C}$, mais une aire quelconque $\mathfrak{A}$ à connexion simple. Soit toujours U une fonction de x et de y, continue dans toute cette aire, et prenant le long du contour de l'aire une série de valeurs données, représentée par u_0.

L'intégrale

$$\Omega_{\mathfrak{A}}(U) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x U)^2 + D_y U)^2\right] dx\,dy,$$

étendue à tous les éléments de cette aire, ne peut devenir négative. Parmi les formes, en nombre infini, que l'on peut attribuer à la fonction U, il doit en exister une qui rende cette intégrale minimum. Désignons par u cette détermination particulière de U, que l'on peut supposer obtenue par un moyen quelconque.

Cela posé, traçons à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ un contour fermé quelconque, qui partage l'aire $\mathfrak{A}$ en deux parties, l'une annulaire et extérieure $\mathfrak{B}$, l'autre intérieure et à connexion simple $\mathfrak{C}$. Imaginons que dans toute l'aire annulaire $\mathfrak{B}$ on attribue à la fonction U la valeur *déterminée* u, et que dans la partie intérieure $\mathfrak{C}$ on laisse U indéterminé.

D'après la supposition de la continuité de U, cette fonction devra prendre, le long de la ligne de séparation des aires $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$, la même série de valeurs que la fonction u, sans quoi il y aurait discontinuité en passant d'un côté à l'autre de cette ligne. De plus, cette fonction U sera encore assujettie à suivre dans l'intérieur de $\mathfrak{C}$ la loi de continuité.

L'intégrale $\Omega_{\mathfrak{A}}(U)$ se composera de deux parties : l'une $\Omega_{\mathfrak{B}}(U)$

$= \Omega_{\mathfrak{B}}(u)$, qui est déterminée et constante, l'autre $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$, dont la valeur variera avec la forme de la fonction U. Donc la valeur totale

$$\Omega_{\mathfrak{A}}(U) = \text{const.} + \Omega_{\mathfrak{C}}(U)$$

ne pourra être minimum qu'autant que $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$ le sera, c'est-à-dire qu'autant que l'on aura choisi pour U la forme qui rendra $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$ minimum.

Or, par hypothèse, on aurait la valeur minimum $\Omega(U)$ en faisant $U = u$, non seulement dans $\mathfrak{B}$, mais encore dans l'autre partie $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$. Donc la fonction u est celle qui rend aussi minimum l'intégrale $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$ parmi toutes les fonctions qui ont sur le contour de $\mathfrak{C}$ la même valeur que u.

Soit pris maintenant pour $\mathfrak{C}$ un cercle de centre c, compris tout entier dans $\mathfrak{A}$. Parmi toutes les fonctions imaginables qui ont sur le contour de $\mathfrak{C}$ la même valeur que u, celle qui rend $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$ minimum est la fonction qui remplit, à l'intérieur de ce cercle, les conditions II et III. Ainsi, cette dernière fonction est celle que l'on doit prendre en tout point d'un cercle tracé du centre c à l'intérieur de $\mathfrak{A}$. Si nous déplaçons maintenant le centre c, comme au n° 151, nous finirons, de proche en proche, par embrasser successivement tous les points de l'aire $\mathfrak{A}$.

Donc, (x, y) *désignant un point quelconque d'une aire à connexion simple* $\mathfrak{A}$, *parmi toutes les fonctions réelles de* x *et de* y, *qui prennent sur le contour de* $\mathfrak{A}$ *une même suite donnée de valeurs, et qui restent continues à l'intérieur de* $\mathfrak{A}$, *il en existe une* u, *qui rend minimum l'intégrale*

$$\Omega_{\mathfrak{A}}(U) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x U)^2 + (D_y U)^2 \right] dx\,dy\,;$$

et cette fonction u *jouit des propriétés suivantes : 1° elle est continue, ainsi que toutes ses dérivées partielles, à l'intérieur de* $\mathfrak{A}$; *2° elle vérifie en tout point de* $\mathfrak{A}$ *l'équation aux dérivées partielles*

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

197. Si l'on suppose maintenant que u soit la partie réelle d'une fonction $u + iv$ de $z = x + iy$, on aura (n° 102), en intégrant

entre deux points z_0, z de l'aire $\mathfrak{A}$, et prenant pour chemin d'intégration une courbe quelconque tracée à l'intérieur de $\mathfrak{A}$,

$$v = \int_{z_0}^{z} (D_x u\, dy - D_y u\, dx) + \text{const.}$$

La quantité sous le signe $\int$ étant une différentielle exacte, l'intégrale sera indépendante du chemin parcouru (n° 130). Donc v sera, comme u, une fonction uniforme de x et de y.

De plus, la valeur de dv donne

$$D_x v = - D_y u, \qquad D_y v = D_x u.$$

Donc (n° 102) *$u + iv$ est une fonction de $z = x + iy$, uniforme et continue à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, dont la partie réelle u prend le long du contour de $\mathfrak{A}$ une suite de valeurs données, et dont la partie imaginaire iv peut prendre en un point quelconque de $\mathfrak{A}$ une valeur donnée.*

Enfin, *la fonction $u + iv$ qui satisfait à ces conditions est unique.* — Car, si l'on remplace $u + iv$ par $(u + iv) + (\upsilon + i\varkappa)$, 1° $\upsilon + i\varkappa$ devra être une fonction de $x + iy$, uniforme et continue dans toute l'aire $\mathfrak{A}$; 2° υ devra s'annuler tout le long du contour de $\mathfrak{A}$; 3° $\varkappa$ prendra la valeur zéro en un certain point z_0 de $\mathfrak{A}$. Puisque υ est nul tout le long du contour de $\mathfrak{A}$, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \upsilon\, d\varkappa$$

est nulle. Donc (n° 137) $\upsilon + i\varkappa$ se réduit à une constante. Cette constante est nulle, puisque υ s'évanouit sur le contour, et $\varkappa$ au point z_0. Donc la fonction $u + iv$ est la seule qui puisse satisfaire aux conditions ci-dessus.

Remarque. Les recherches précédentes reposent sur le principe, admis comme évident, que, parmi toutes les fonctions U qui satisfont à des conditions données dans une aire donnée, il en existe une qui rend l'intégrale $\Omega(U)$ minimum, et nous avons vu que c'est celle qui satisfait à une équation aux dérivées partielles, analogue à celle du *potentiel*. Ce principe a été employé par Lejeune-Dirichlet dans ses Leçons sur l'action des forces qui agissent en raison inverse du carré de la distance, et pour cette raison, Riemann lui a donné le nom de *principe de Dirichlet*.

198. Supposons maintenant que la fonction à déterminer ne

soit plus assujettie à rester toujours continue à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, mais qu'elle puisse présenter des infinis de première espèce. Ses dérivées étant infinies pour les mêmes points, l'intégrale

$$\int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dx\,dy$$

sera elle-même infinie, et ne pourra plus être employée.

Dans ce cas, Riemann emploie, au lieu de cette intégrale, la suivante,

$$\Omega(\alpha) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x \alpha - D_y \beta)^2 + (D_y \alpha + D_x \beta)^2\right] dx\,dy,$$

prise encore dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$. Cette expression s'annule (nº 102), toutes les fois que $\alpha + i\beta$ est une fonction de $z = x + iy$.

Soit maintenant u une fonction de x et de y qui ait les mêmes infinis $c, c', \ldots$ que la partie réelle α de $\alpha + i\beta$, et qui en ces points prenne une valeur différant de celle de α d'une quantité finie, c'est-à-dire telle que $\lim_{z=c}(u - \alpha)$ ait une valeur finie en chaque point c. Nous dirons dans ce cas, pour abréger, que la fonction u *devient infinie de la même manière que* α.

Cela posé, si l'on fait

$$u - \alpha = \mu,$$

la fonction μ sera finie et continue dans tout l'intérieur de $\mathfrak{A}$, et il en sera de même de toutes ses dérivées,

$$D_x \mu = D_x u - D_x \alpha = D_x u - D_y \beta,$$
$$D_y \mu = D_y u - D_y \alpha = D_y u + D_x \beta.$$

Donc

$$\Omega(u) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x u - D_y \beta)^2 + (D_y u + D_x \beta)^2\right] dx\,dy$$

aura une valeur finie.

Si l'on applique à la recherche de la fonction μ, ou, ce qui revient au même, de la fonction u qui rend cette intégrale minimum, le même calcul qu'au nº 195, on verra que l'intégrale sera rendue

minimum par la fonction u qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

L'existence d'une fonction μ et d'une seule entraîne l'existence d'une fonction u et d'une seule.

Si l'on considère maintenant u comme la partie réelle d'une fonction de $x+iy$, l'autre composante v sera déterminée, à une constante près, par l'équation

$$d(v-\beta) = -(D_y u + D_x \beta)\,dx + (D_x u - D_y \beta)\,dy.$$

Donc *une fonction* $w = u + iv$ *d'une variable complexe est déterminée dans l'étendue d'une aire* $\mathfrak{A}$ *à connexion simple, lorsqu'on donne :* 1° *la suite des valeurs de* u *le long du contour de* $\mathfrak{A}$*;* 2° *la valeur de* v *en un point quelconque de* $\mathfrak{A}$*;* 3° *une fonction* $\alpha + i\beta$ *qui ait les mêmes infinis que* w *et qui devienne infinie de la même manière.*

199. Soit $m + in$ une fonction quelconque, non de $x+iy$, mais simplement de x et de y; et supposons que dans l'aire $\mathfrak{A}$ cette fonction *ait les mêmes infinis et soit infinie de la même manière qu'une fonction* $\alpha + i\beta$ *de* $x + iy$. Les expressions

$$D_x m - D_y n \quad , \quad D_y m + D_x n$$

seront alors finies en tout point de $\mathfrak{A}$, et il en sera de même de l'intégrale

$$\Omega(m) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x m - D_y n)^2 + (D_y m + D_x n)^2\right] dx\,dy.$$

Si maintenant μ désigne une fonction de x et de y, qui reste finie dans $\mathfrak{A}$, et que nous posions

$$u = m + \mu,$$

u sera infini de la même manière que m et par suite que α. Donc $\Omega(u)$ sera fini, et deviendra minimum lorsqu'on prendra pour u la fonction qui satisfera à l'équation

$$(1) \qquad D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

La fonction u, ainsi déterminée, pourra être prise pour la partie

réelle d'une fonction de $x + iy$. On peut donc déterminer μ de façon que $u = m + \mu$, satisfaisant à l'équation (1), prenne la même valeur que m le long du contour de $\mathfrak{A}$, et soit, à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, infini de la même manière que α, et nous avons vu que cette détermination est unique.

On a ensuite, comme précédemment,

$$d(v-n) = -(\mathrm{D}_y u + \mathrm{D}_x n)\,dx + (\mathrm{D}_x u - \mathrm{D}_y n)\,dy,$$

les coefficients de dx et de dy étant finis en tout point de $\mathfrak{A}$, et l'on voit aisément que la fonction v ainsi déterminée remplit les conditions du n° 102. Si donc on pose la différentielle du second membre $= d\nu$, on aura

$$v = n + \nu,$$

et par suite, en ajoutant à $m + in$ la fonction finie et continue $\mu + i\nu$,

$$(m + in) + (\mu + i\nu)$$

deviendra une fonction de $x + iy$, dont la partie réelle aura les mêmes valeurs que m le long du contour de $\mathfrak{A}$. La fonction ν renfermera une constante arbitraire, que l'on déterminera si l'on connaît la valeur de ν en un point de l'aire $\mathfrak{A}$.

On peut se servir de ce calcul pour déterminer la fonction $w = u + iv$. Comme on peut choisir les fonctions m et n d'une manière entièrement arbitraire, on pourra faire ensorte qu'à l'intérieur de contours infiniment petits tracés autour des infinis que doit avoir w, la fonction $m + in$ prenne les mêmes valeurs que la fonction donnée $\alpha + i\beta$, qui doit être infinie de la même manière que w; qu'en dehors de ces contours elle reste toujours finie et continue, et que sur le contour de $\mathfrak{A}$ la partie réelle m prenne les valeurs données pour la partie réelle de w. Alors $\Omega\,(m)$ sera identiquement nulle à l'intérieur de ces contours, et sera finie dans tout le reste de l'aire $\mathfrak{A}$. En ajoutant à $m + in$ la fonction $\mu + i\nu$, on obtiendra une fonction w de z, et comme le changement de $m + in$ en une fonction de z ne peut se faire que d'une seule manière, w sera déterminé à une constante près, renfermée dans ν.

§ IV.

200. Supposons, comme au n° 180, la sphère partagée en deux calottes : l'une $\mathfrak{A}$ contenant tous les infinis de la fonction qui sont, sur le plan horizontal, à des distances finies de l'origine; l'autre $\mathfrak{A}'$ ne contenant pas d'autre infini que le point O', s'il en est un.

L'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz$ sera le résidu intégral de la fonction relativement à l'aire $\mathfrak{A}$. L'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} \varphi(z')\,dz' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2}$$

(en ayant égard au changement de signe indiqué au n° 180) sera le résidu de la fonction $\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right)$ relativement au point O', c'est-à-dire à $z' = 0$ ou à $z = \infty$.

Or les deux intégrales, prises le long de la même ligne de séparation des deux calottes et en sens contraire, sont égales et de signe contraire. Donc le résidu intégral $\mathcal{E} f(z)$, relatif à tous les infinis de la fonction autres que $z = \infty$, est égal, au signe près, au résidu de la fonction $\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right)$ relatif à $z' = 0$,

$$\mathcal{E} f(z) = -\mathcal{E}_0 \frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right).$$

Si $z' . \frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{1}{z'} f\left(\frac{1}{z'}\right) = z f(z)$ a une limite ***nulle*** ou ***finie*** F pour $z = 0$ ou pour $z = \infty$, on aura alors, dans le premier cas, $\mathcal{E} f(z) = 0$, et dans le second $\mathcal{E} f(z) = -F$.

201. Supposons, par exemple, que l'on se propose de calculer le résidu intégral d'une fonction rationnelle

$$\frac{\mathrm{f}(z)}{F(z)},$$

$\mathrm{f}(z)$ et $F(z)$ étant deux polynômes entiers, de degrés m et n, savoir,

$$\mathrm{f}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m,$$
$$F(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n.$$

On tire de là

$$\frac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)} = z^{n-m-2}\,\frac{a_m + a_{m-1}z' + \cdots}{b_n + b_{n-1}z' + \cdots}.$$

Soit maintenant

$$n - m - 2 = -\mu.$$

On pourra, par la simple division, mettre la fraction

$$\frac{a_m + a_{m-1}z' + \cdots}{b_n + b_{n-1}z' + \cdots}$$

sous la forme

$$\frac{a_m}{b_n} + \alpha_1 z' + \cdots + \alpha_{\mu-1} z'^{\mu-1} + \omega_n z'^{\mu},$$

ω_n étant une quantité qui ne devient pas infinie pour $z' = 0$. Il vient alors

$$\frac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{a_m}{b_n} z'^{-\mu} + \alpha_1 z'^{-\mu+1} + \cdots + \alpha_{\mu-1} z'^{-1} + \omega_n.$$

En intégrant maintenant les deux membres le long du contour de $\mathfrak{A}'$, comme au n° 141, il vient, le résidu de ω_n étant nul,

$$\mathcal{E}_0 \frac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)} = \alpha_{\mu-1}.$$

Donc

$$\mathcal{E}\frac{f(z)}{F(z)} = -\alpha_{\mu-1}.$$

Pour

$$n - m - 2 = -1, \text{ ou } n = m + 1,$$

on a

$$\mathcal{E}\frac{f(z)}{F(z)} = -\frac{a_m}{b_n}.$$

Cette valeur n'est autre chose que la valeur de $-zf(z)$ du numéro précédent. Pour

$$n - m - 2 \geqq 0, \quad \text{ou } n \geqq m + 2,$$

le résidu intégral est nul. On a alors, en effet, $\lim_\infty zf(z) = 0$.

La fonction $\dfrac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)}$ devenant infinie d'ordre $-(n-m-2)=\mu$ pour $z'=0$, le résidu $\alpha_{\mu-1}$ aura pour expression générale (n° 168), en supposant $m-n+1 \geqq 0$,

$$\frac{1}{(m-n+1)!} \lim_{\varepsilon=0} D_\varepsilon^{m-n+1} \left[\varepsilon^{m-n} \frac{f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right].$$

202. Ce que nous avons dit de l'évaluation des indices d'une fonction aux points où elle devient nulle ou infinie, s'applique également à la valeur $z=\infty$, comme on peut le voir en transformant cette variable, et rapportant la fonction au plan antipode, auquel cas on a à considérer l'indice d'une fonction de z' pour $z'=0$.

Soient maintenant $c_1, c_2, \ldots$ tous les zéros et les infinis de la fonction dans toute l'étendue de la sphère, y compris, s'il y a lieu, le point O' ; $n_1, n_2, \ldots$ leurs indices respectifs, positifs ou négatifs.

Partageons la sphère en deux calottes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, contenant chacune une partie des points c, savoir : l'une les points $c_1, c_2, \ldots$, y compris le point O; l'autre les points $c'_1, c'_2, \ldots$, y compris le point O'. En transportant ces points, les premiers sur le plan horizontal, les seconds sur le plan antipode, nous aurons (n° 171)

$$n_1 + n_2 + \cdots = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f},$$
$$n'_1 + n'_2 + \cdots = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}'} \frac{df}{f}.$$

Or les deux intégrales $\int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f}$, $\int_{\mathfrak{A}'} \frac{df}{f}$ sont égales et de signe contraire, comme les intégrales analogues considérées au numéro 182. Donc la somme totale des indices est nulle,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n'_1 + n'_2 + \cdots = 0.$$

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme dans toute l'étendue de la sphère, et ne présentant que des discontinuités de première espèce, la somme des indices de la fonction pour tous les points de la sphère est nulle.*

En d'autres termes, *le nombre total des zéros d'une fonction uniforme est égal au nombre total de ses infinis,* en comptant chaque zéro ou chaque infini autant de fois qu'il y a d'unités dans l'indice correspondant.

Considérons, par exemple, un polynôme de degré m. Pour $z = \infty$, en O′, ce polynôme est infiniment grand de l'ordre m, et il ne devient infini qu'en ce point O′, de sorte qu'aux autres points de la sphère les indices ne peuvent être que positifs. La somme de ces indices positifs devant être m, le polynôme, égalé à zéro, admet donc m racines, égales ou inégales, ce qui donne une nouvelle démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques. (*Première partie,* nos 75 et 76.)

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

§ Ier.

Détermination du nombre des racines d'une équation comprises dans une aire donnée.

203. Nous avons vu (nº 172) que, dans l'étendue d'une aire $\mathfrak{A}$, l'excès M du nombre des zéros d'une fonction uniforme $f(z)$ sur le nombre de ses infinis est égal au résidu intégral de la fonction $D_z \log f(z)$ relatif à l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} d\log f(z).$$

Désignons par la caractéristique Δ l'accroissement d'une fonction non uniforme, représentée par une intégrale, lorsque cette intégrale est prise tout le long du contour de $\mathfrak{A}$. D'après cela, en représentant par z_0 la valeur de la variable z en un point du contour, par z_1 la valeur de la variable au même point, lorsqu'on a fait croître son argument de 2π, de sorte que

$$z_0 = re^{i\varphi}, \qquad z_1 = re^{i(\varphi+2\pi)},$$

et par F_0, F_1 les valeurs correspondantes de la fonction multiforme $F(z)$, on aura,

$$\int_{\mathfrak{A}} dF = \Delta F = F_1 - F_0.$$

On trouvera ainsi, en particulier,

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f} = \log\frac{f_1}{f_0} = \Delta \log f,$$

et de plus

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z} = \log\frac{z_1}{z_0} = \Delta \log z = 2\pi i.$$

Donc la valeur de l'indice intégral relatif à l'aire $\mathfrak{A}$ pourra se mettre sous la forme

$$M = \frac{\Delta \log f}{\Delta \log z}.$$

Cette expression de la différence entre les nombres de racines des équations

$$f = 0, \qquad f = \infty$$

a reçu de Cauchy le nom de *compteur logarithmique*.

204. Supposons, par exemple, que f soit un polynôme entier du degré n,

$$\begin{aligned} f &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right). \end{aligned}$$

Il est clair que l'équation $f = \infty$ ne peut avoir de racines finies. Donc la somme M ne contient aucun indice négatif, et par suite elle est égale au nombre des racines de l'équation $f = 0$. Prenons pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon aussi grand que l'on voudra. Nous aurons

$$\log f = n \log z + \log\left(a_0 + \frac{\varkappa}{z}\right),$$

en désignant par $\varkappa$ une quantité qui ne devient pas infinie pour $z = \infty$. Donc

$$\Delta \log f = n \,.\, \Delta \log z + \Delta \log\left(a_0 + \frac{\varkappa}{z}\right),$$

d'où

$$\frac{\Delta \log f}{\Delta \log z} = n + \frac{\Delta \log\left(a_0 + \dfrac{\varkappa}{z}\right)}{\Delta \log z}.$$

Or, pour z assez grand, le module de $\dfrac{\varkappa}{z}$ devient inférieur à celui de a_0, d'où il suit que $\log\left(a_0 + \dfrac{\varkappa}{z}\right)$ reprend sa valeur primitive, lorsque z a parcouru la circonférence entière [1].

---

[1] Soit, en effet, mod $\frac{v}{u} < 1$, $\frac{v}{u} = re^{ip}$, r étant < 1. On a

$$\Delta \log(u + v) = \Delta \log u + \Delta \log\left(1 + \frac{v}{u}\right),$$

$$1 + \frac{v}{u} = 1 + re^{ip} = \rho e^{i\varphi},$$

$$1 + r\cos p = \rho \cos \varphi.$$

Donc

$$\Delta \log\left(a_0 + \frac{x}{z}\right) = \Delta \log a_0 = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{\Delta \log f}{\Delta \log z} = n.$$

L'équation $f = 0$ a donc n racines. Nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration du théorème établi dans la *Première partie* (pages 46 et suivantes).

205. On peut énoncer d'une autre manière le théorème du n° 203. Soit

$$f(z) = u + iv = Re^{iP},$$

d'où

$$u = R \cos P, \quad v = R \sin P,$$

$$\frac{u}{v} = \cot P.$$

Lorsque la variable z a fait le tour de l'aire $\mathfrak{A}$, $f(z)$ reprenant sa valeur, $\log f(z)$ a crû d'un multiple de $2\pi i$, et nous avons vu que cet accroissement $\Delta \log f(z)$ est égal à $2\pi i\, M$ multiplié par l'excès M du nombre des zéros sur le nombre des infinis.

Il s'ensuit de là que

$$\log f(z) = \log R + iP$$

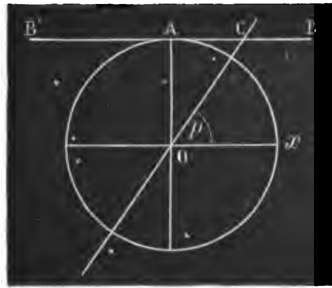
croît de $2M\pi i$, et par conséquent l'argument P croît de $2M\pi$.

Puisque r est < 1, $1 + r \cos p$ sera toujours positif, ainsi que $\cos \varphi$. Donc, l'argument φ de $1 + \frac{v}{u}$ ne croît pas d'une circonférence, et par suite $\log\left(1 + \frac{v}{u}\right)$ reprend sa valeur primitive, après que z a parcouru le contour de $\mathfrak{A}$. Donc

$$\Delta \log\left(1 + \frac{v}{u}\right) = 0, \qquad \Delta \log (u + v) = \Delta \log u.$$

On peut donc, dans la somme $u + v$, négliger la partie v dont le module est constamment $<$ mod u.

Considérons maintenant (*fig.* 32) une droite indéfinie dans les deux sens, mobile autour du centre du cercle sur lequel se mesurent les angles, et tournant dans un sens quelconque. Chaque fois que l'une ou l'autre des directions de la droite passera par le point A, la droite ayant décrit un angle $P = \frac{\pi}{2} + k\pi$, la cotangente de cet angle P, représentée par la ligne AC, s'annulera. De plus, elle s'annulera en passant d'une valeur positive à une valeur négative, si à ce moment l'angle P va en croissant, et, au contraire, elle s'annulera en passant d'une valeur négative à une valeur positive, si l'angle P va en décroissant.



Si à la fin du mouvement l'angle P a repris sa valeur primitive, la droite OC aura dû passer par le point A autant de fois en allant de droite à gauche qu'en allant de gauche à droite. Si l'angle P a crû de π, OC aura dû passer par A une fois de plus en allant de droite à gauche que de gauche à droite. Si l'angle P a crû de $2M\pi$, OC aura passé $2M$ fois de plus par A de droite à gauche que de gauche à droite. Donc $\cot P$ se sera annulée $2M$ fois de plus en passant du positif ou négatif qu'en passant du négatif ou positif.

Donc, lorsque l'argument P de $f(z)$ croîtra de $2M\pi$, la quantité

$$\frac{u}{v} = \cot P$$

s'annulera $2M$ fois de plus en passant du positif au négatif qu'en passant du négatif au positif.

Si donc on pose

$$f(z) = u + iv,$$

et qu'en faisant parcourir à z le contour entier d'une aire $\mathfrak{A}$, *on compte combien de fois le rapport* $\frac{u}{v}$ *s'annule en passant du positif au négatif, et combien de fois il s'annule en passant du négatif au positif, l'excès du premier nombre de fois sur le second sera double de l'excès du nombre des racines de l'équation* $f(z) = 0$ *comprises dans l'aire* $\mathfrak{A}$ *sur le nombre des racines de l'équation* $f(z) = \infty$ *comprises dans la même aire.*

Si la fonction $f(z)$ n'a aucun infini à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, l'excès en

question sera précisément égal au double du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ contenues dans l'aire $\mathfrak{A}$.

206. Soit, en particulier, une fonction entière et rationnelle

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m .$$

Cette fonction ne deviendra pas infinie pour des valeurs finies de z. Prenons pour contour un cercle de rayon infini r. Le premier terme $a_0 z^m$ deviendra infiniment grand par rapport à la somme des autres, et l'on pourra poser

$$f(z) = a_0 r^m e^{mip} (1 + \varepsilon),$$

ε étant infiniment petit.

Soit maintenant

$$a_0 = \lambda e^{i\theta}.$$

On aura, à des quantités près infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve,

$$u = \lambda r^m \cos(mp + \theta), \qquad v = \lambda r^m \sin(mp + \theta),$$

d'où

$$\frac{u}{v} = \cot(mp + \theta),$$

à un infiniment petit près.

Si maintenant z fait le tour du cercle, p croîtra de 2π, et $mp + \theta$ de $2m\pi$. Donc $\cot(mp + \theta)$ s'annulera $2m$ fois en passant du positif au négatif, sans jamais s'annuler en passant du négatif au positif. Donc, l'équation $f(z) = 0$ a m racines dans l'intérieur du cercle infini.

207. Pour déterminer la différence $\nu - \nu'$ entre le nombre de fois ν que $\frac{u}{v}$ passe en s'annulant du positif au négatif et le nombre de fois ν' qu'il passe du négatif au positif, tandis que z parcourt le contour de $\mathfrak{A}$, Sturm a fait connaître le procédé suivant, qui est une extension de celui qu'il avait donné pour le cas des racines réelles.

Prenons pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne qui se compose de parties $C, C', \ldots$, sur chacune desquelles x et y soient exprimées en fonctions rationnelles d'une troisième variable t. Pour chaque partie, u et v seront exprimés également en fonctions rationnelles de t, de sorte

que le rapport $\frac{u}{v}$ se changera dans le rapport $\frac{U}{V}$ de deux fonctions entières de t. Le problème se ramènera alors à trouver la différence $\nu - \nu'$ pour chacune des parties C du contour. La somme de toutes ces valeurs donnera le nombre $2M$.

Divisons maintenant U par V; soit $-V_1$ le reste de la division. Divisons de même V par V_1, et soit $-V_2$ le reste de la division, et ainsi de suite ([1]). On finira par arriver à un reste constant $-V_n$. Car U et V, ne s'annulant pas à la fois sur le contour, n'ont pas de facteur commun. Soient maintenant, dans le sens du mouvement positif, a et b les extrémités initiale et finale de la portion de contour C. Alors $\nu - \nu'$ sera égal à l'excès du nombre de variations que la suite

$$U, V, V_1, \ldots, V_n$$

présente au point b sur le nombre des variations que la même suite présente au point a.

La démonstration est la même que pour le théorème relatif aux racines réelles. On fait voir qu'un changement de signe de l'une des quantités $V, V_1, \ldots$ n'a pas d'influence sur le nombre des variations. U et V ne peuvent pas changer de signe en même temps. Donc, si $U = 0$ pour $t = c$, on aura à considérer les cas suivants, ε désignant un accroissement compté positivement de a vers b :

	U	V	U	V	U	V	U	V
$c - \varepsilon$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$c + \varepsilon$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$

Dans le 1[er] et le 4[e] cas, $\frac{U}{V}$ passe de $+$ à $-$; donc, dans le passage par le point c, ν augmente d'une unité, et en même temps il se produit une variation de plus; de sorte que l'accroissement du nombre des variations donne bien l'accroissement de $\nu - \nu'$.

Dans le 2[e] et le 3[e] cas, $\frac{U}{V}$ passe de $-$ à $+$, ν' croît d'une unité, et par suite $\nu - \nu'$ diminue d'une unité. Mais en même

---

([1]) V peut être de degré plus élevé que U, auquel cas le reste de la division de U par V est U, et alors $-V_1 = U$.

temps le nombre des variations diminue aussi d'une unité. Donc le théorème continue à subsister. Or, comme il ne peut y avoir de changement dans le nombre des variations que lorsqu'on passe par un point c, le théorème est complètement démontré.

208. Pour mettre en pratique cette méthode, prenons pour contour celui d'un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes coordonnées, et qui ait pour abscisses extrêmes x_0, X, et pour ordonnées extrêmes y_0, Y, en supposant

$$x_0 < X \ , \ y_0 < Y.$$

Le contour se composera de quatre parties :

C correspondant à $y = y_0$, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$;
C' . . . . $x = X$, ... $y = y_0$ . . . . $y = Y$;
C'' . . . . $y = Y$, ... $x = X$ . . . . $x = x_0$;
C''' . . . . $x = x_0$, ... $y = Y$ . . . . $y = y_0$.

Ainsi, dans chacune des quatre portions, U et V ne dépendront que d'une seule variable, savoir, de x pour C et C'', de y pour C' et C'''.

Si l'on veut obtenir toutes les racines d'une équation, on emploiera d'abord la méthode connue de Sturm pour trouver les racines réelles

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad \ldots, \quad z = a_k.$$

On divisera ensuite $f(z)$ par le produit

$$(z - a_1)\ (z - a_2)\ \ldots\ (z - a_k),$$

ce qui donnera une équation $\varphi(z) = 0$, qui n'aura plus de racines réelles, situées sur l'axe de x. On pourra prendre alors cet axe lui-même pour un des côtés du rectangle. En faisant d'abord

$$x_0 = -\infty, \quad y_0 = 0, \quad X = +\infty, \quad Y = +\infty,$$

on obtiendra le nombre des racines complexes $x + iy$ pour lesquelles le coefficient y de i est positif. Puis, en faisant

$$x_0 = -\infty, \quad y_0 = -\infty, \quad X = +\infty, \quad Y = 0,$$

on trouvera de même le nombre des racines complexes dans lesquelles le coefficient de i est négatif.

On partagera ensuite le plan en bandes par des parallèles à l'axe

des z; puis on subdivisera par des parallèles à l'axe des y chacune des bandes qui renfermeront des racines. De cette manière, les racines se trouveront resserrées dans des limites assez étroites pour qu'on leur applique la méthode d'approximation de Newton.

Ici, comme dans la recherche des racines réelles, il n'est pas absolument nécessaire que l'équation soit réduite à n'avoir plus que des racines simples. Cependant, il y a naturellement avantage à commencer par l'application de la méthode des racines multiples, afin d'opérer ensuite sur une équation plus simple.

Il est facile de déterminer les racines imaginaires pures, qui sont les racines communes aux deux équations

$$u(0,y) = 0, \qquad v(0,y) = 0,$$

et qui s'obtiendront en égalant à zéro le facteur commun à ces deux équations. Après les avoir supprimées, on partagera le plan en quatre parties correspondantes aux quatre angles des axes coordonnés.

§ II.

Développement des fonctions en séries périodiques.

209. Du théorème de Laurent, démontré au nº 155, il résulte que, si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans l'intervalle compris entre deux cercles concentriques, de rayons r et R, on pourra développer $f(z)$ en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de la différence $z-c$, c représentant le centre commun des deux cercles. On aura de cette manière

$$f(z) = A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \cdots \\ + A_{-1}(z-c)^{-1} + A_{-2}(z-c)^{-2} + \cdots,$$

ou, en posant

$$z-c = re^{ip},$$

$$(1) \qquad f(c+re^{ip}) = A_0 + A_1 re^{ip} + A_2 r^2 e^{2ip} + \cdots \\ + A_{-1} r^{-1} e^{-ip} + A_{-2} r^{-2} e^{-2ip} + \cdots,$$

chaque coefficient A_n, d'indice positif, nul ou négatif, étant déterminé par la formule générale

$$A_n = \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f(c+\rho e^{i\varphi})e^{-ni\varphi}\,d\varphi,$$

où ρ est un module quelconque compris entre r et R.

Si dans le second membre de la série (1) on remplace l'argument p par $p+2k\pi$, ce second membre ne change pas. Donc le second membre est une *fonction périodique* de l'angle p, et par conséquent il en est de même du premier membre, tant que l'équation (1) subsiste. C'est ce qui résulte d'ailleurs de la supposition que la fonction $f(z)$ est uniforme dans l'aire considérée; car, puisque l'on a

$$c+re^{ip} = c+re^{i(p+2k\pi)},$$

il en résulte

$$f(c+re^{ip}) = f(c+re^{i(p+2k\pi)}),$$

c'est-à-dire, si l'on pose $f(c+re^{ip}) = F(p)$,

$$F(p) = F(p+2k\pi).$$

Ainsi, une fonction uniforme de $z=c+re^{ip}$ est une *fonction périodique* de l'argument p, et la série qui exprime le développement de la fonction suivant les puissances de $z-c=re^{ip}$ est nécessairement une *série périodique* par rapport à l'argument p.

210. On peut présenter le développement (1) sous forme trigonométrique, en remplaçant chaque exponentielle e^{nip} par $\cos np + i\sin np$. Il vient alors, en posant

$$A_0 = B_0,\quad A_n r^n + A_{-n} r^{-n} = B_n,$$
$$i(A_n r^n - A_{-n} r^{-n}) = C_n,$$
$$F(p) = B_0 + B_1\cos p + B_2\cos 2p + \cdots$$
$$+ C_1\sin p + C_2\sin 2p + \cdots.$$

On voit aisément que, si $F(p)$ est une fonction *paire* de p, telle que $F(-p) = F(+p)$, le développement devra se réduire à la première ligne, et ne contenir que des cosinus. Au contraire, si $F(p)$ est une fonction *impaire* de p, telle que $F(-p) = -F(+p)$, le développement devra se réduire à la seconde ligne, et ne contenir que des sinus.

211. Appliquons, par exemple, ces formules au développement de la *fonction perturbatrice.*

Soit **r** la distance de deux astres, s un nombre entier quelconque. On veut développer la fonction

$$\Omega = \frac{1}{\mathbf{r}^s}$$

en une série coordonnée suivant les puissances de l'exponentielle

$$z = e^{i\psi},$$

qui a pour argument l'anomalie excentrique ψ de l'un des astres.

La distance mutuelle **r** est déterminée par une équation de la forme

$$\mathbf{r}^2 = H - K\cos(\psi - \alpha) + J\cos 2\psi,$$

H, K, α, J étant des quantités réelles, indépendantes de ψ. On fait voir facilement que la valeur de $\mathbf{r}^2$ peut se décomposer en quatre facteurs du premier degré par rapport à z. Les racines de l'équation $\mathbf{r}^2 = 0$, du 4ᵉ degré en z, sont de la forme

$$ae^{i\theta}, \quad \frac{1}{a}e^{i\theta}, \quad be^{-i\theta}, \quad \frac{1}{b}e^{-i\theta},$$

a, b, θ désignant des constantes réelles, et l'on peut supposer

$$0 < b < a < 1.$$

La valeur de $\mathbf{r}^2$ prendra alors la forme

$$\mathbf{r}^2 = \frac{J}{2ab}\left(1 - ae^{-i\theta}.z\right)\left(1 - ae^{i\theta}.\frac{1}{z}\right)\left(1 - be^{i\theta}.z\right)\left(1 - be^{-i\theta}.\frac{1}{z}\right),$$

d'où l'on tire

$$\Omega = \left(\frac{2ab}{J}\right)^{\frac{s}{2}}\left(1 - ae^{-i\theta}.z\right)^{-\frac{s}{2}}\left(1 - ae^{i\theta}.\frac{1}{z}\right)^{-\frac{s}{2}}$$
$$\times\left(1 - be^{i\theta}.z\right)^{-\frac{s}{2}}\left(1 - be^{-i\theta}.\frac{1}{z}\right)^{-\frac{s}{2}}.$$

Bien que la fonction Ω se présente sous la forme d'une fonction à deux déterminations (nᵒ 120), nous verrons cependant dans la *Troisième partie* que cette fonction peut être considérée comme

uniforme, lorsqu'on fait varier z d'une manière continue dans l'intervalle de deux cercles passant par deux points-racines consécutifs de l'équation $\mathbf{r}^2 = 0$. Donc la fonction sera développable par le théorème de Laurent pour toute valeur de z dont le module sera compris entre a et $\frac{1}{a}$, et en particulier pour le cas que nous considérons, où le module de z est égal à l'unité. On aura donc, en faisant, dans la formule des numéros précédents,

$$
\begin{aligned}
r = \rho = 1\,, \\
\Omega &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots \\
&\quad + A_{-1} z^{-1} + A_{-2} z^{-2} + \cdots \\
&= A_0 + A_1 e^{i\psi} + A_2 e^{2i\psi} + \cdots \\
&\quad + A_{-1} e^{-i\psi} + A_{-2} e^{-2i\psi} + \cdots,
\end{aligned}
$$

et pour toute valeur entière, positive, nulle ou négative, de n,

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Omega\, e^{-ni\psi}\, d\psi\,.$$

Ω étant une fonction réelle de ψ, les valeurs de A_n, A_{-n}, qui correspondent à deux indices égaux et de signe contraire, seront deux quantités complexes conjuguées, de la forme

$$M_n\, e^{iN_n}\,, \qquad M_n\, e^{-iN_n}\,.$$

En réunissant donc les termes de développement qui correspondent à ces deux indices, on aura

$$
\begin{aligned}
A_n z^n + A_{-n} z^{-n} &= M_n \left(z^n e^{iN_n} + z^{-n} e^{-iN_n} \right) \\
&= 2 M_n \cos(n\psi + N_n)\,,
\end{aligned}
$$

M_n et N_n étant des quantités réelles.

212. Sous la forme que nous avons donnée au développement (1) de $f(c + re^{ip}) = F(p)$, la variable p est supposée n'admettre que des valeurs réelles. Il est facile de transformer ce développement de manière que la variable réelle p soit remplacée par une variable complexe, sans que la fonction et la série cessent d'être périodiques par rapport à cette nouvelle variable.

Il suffit, pour cela, de faire

$$z - c = re^{ip} = e^{-q+ip} = e^{i(p+iq)},$$

d'où

$$f(c + re^{ip}) = f(c + e^{i(p+iq)}),$$

et, en posant

$$p + iq = \frac{2\pi w}{\lambda},$$

$$f(z) = f\left(c + e^{\frac{2\pi i w}{\lambda}}\right) = F(w),$$

(3) $$F(w) = A_0 + A_1 e^{\frac{\pi i w}{\lambda}} + A_2 e^{\frac{4\pi i w}{\lambda}} + \cdots + A_{-1} e^{-\frac{2\pi i w}{\lambda}} + A_{-2} e^{-\frac{4\pi i w}{\lambda}} + \cdots.$$

La fonction et la série ne changent pas, lorsqu'on fait croître $\frac{2\pi i w}{\lambda}$ de $2k\pi i$, ou w de $k\lambda$, de sorte qu'on a

$$F(w) = F(w + k\lambda).$$

La fonction est donc périodique par rapport à la variable w, la période étant la quantité réelle ou complexe λ.

En introduisant la même transformation dans la formule (2) qui détermine le coefficient A_n, et posant

$$\zeta = \rho e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + i\chi)} = e^{\frac{2\pi i \varkappa}{\lambda}},$$

d'où

$$\varkappa = \frac{\lambda}{2\pi}(\varphi + i\chi),$$

il vient

$$A_n = \int_0^{2\pi} F\left[\frac{\lambda}{2\pi}(\varphi + i\chi)\right] e^{-ni(\varphi + i\chi)}\, d\varphi.$$

213. Par suite du changement de variable, le contour de l'aire dans laquelle était renfermée la variable indépendante z va changer de forme. Voyons par quelles lignes seront remplacés les deux cercles qui limitaient cette aire.

Il faut pour cela voir quel lieu décrit le point ζ, lorsqu'on laisse constant le module ρ de l'expression

$$\rho e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+i\chi)} = e^{\frac{2\pi i \gamma}{\lambda}},$$

c'est-à-dire lorsque le point z décrit autour du centre c un cercle de rayon ρ. Si l'on fait.

$$\gamma = \mathrm{r}e^{i\varpi}, \qquad \lambda = l\, e^{i\theta},$$

il vient

$$\mathrm{r}e^{i\varpi} = \frac{l}{2\pi} e^{i\theta} (\varphi + i\chi),$$

d'où

$$\frac{2\pi \mathrm{r}}{l} \sin(\varpi - \theta) = \chi,$$

$$\frac{2\pi \mathrm{r}}{l} \cos(\varpi - \theta) = \varphi.$$

Donc, pour que ρ et, par suite, χ restent constants, il faut et il suffit que $\mathrm{r} \sin(\varpi - \theta)$ reste aussi constant.

Or $\mathrm{r} \sin(\varpi - \theta) =$ constante est l'équation, entre les coordonnées polaires r et ϖ, d'une droite faisant avec l'axe des x l'angle θ, et parallèle par conséquent à la droite menée de l'origine au point λ. Donc le cercle de rayon ρ et de centre c se changera en une droite menée à la distance $\frac{l\chi}{2\pi} = \frac{l}{2\pi} \log \frac{1}{\rho}$ de l'origine, et parallèle à la droite 0λ.

Les deux cercles extrêmes, des rayons r_0 et r_1, menés par deux points de discontinuité consécutifs z_0, z_1 de la fonction $f(z)$, se changeront en deux droites, menées parallèlement à 0λ par les points de discontinuité correspondants w_0, w_1 de la fonction $F(w)$, et la droite qui remplace le cercle de rayon ρ sera une parallèle quelconque aux deux autres droites, comprise entre ces deux droites.

Si l'on désigne par h_0, h_1 les distances des points z_0, z_1 à la droite 0λ, la droite intermédiaire sera à une distance h de 0λ, telle qu'on aura

$$h_0 < h < h.$$

On aura alors

$$\chi = \frac{2\pi h}{l}$$

et en faisant

$$\varphi = \frac{2\pi\omega}{l},$$

$$(4) \qquad A_n = \frac{1}{l}\int_0^l F\left(\frac{\lambda(\omega+ih)}{l}\right) e^{\frac{2n\pi}{l}(h-i\omega)} d\omega.$$

214. Lorsqu'on voudra obtenir le développement de $f(z)$ pour un point z situé en dehors de l'intervalle des cercles décrits par les points z_0, z_1, par exemple, dans l'intervalle compris entre les cercles menés par z_1 et par le point de discontinuité suivant z_2, on devra donner à ρ une autre valeur, comprise entre les distances cz_1 et cz_2, et substituer cette nouvelle valeur dans l'expression (2) de A_n.

De même, lorsqu'on voudra développer $F(w)$ pour un point w situé en dehors des parallèles à $O\lambda$ menées par w_0, w_1, pour un point compris entre les parallèles menées par w_1 et le point de discontinuité suivant w_2, on devra prendre pour h une nouvelle valeur comprise entre les distances h_1, h_2 de w_1, w_2 à $O\lambda$, et substituer cette nouvelle valeur dans la formule (4).

215. On peut toujours, par un changement de variable, qui revient à faire tourner l'axe des x de l'angle θ, faire ensorte que la période λ de la fonction $F(w)$ soit réelle. Il suffit, pour cela, l étant le module de λ, de poser

$$\frac{2\pi w'}{l} = \frac{2\pi w}{\lambda} = \frac{2\pi}{l} we^{-i\theta},$$

c'est-à-dire d'introduire, au lieu de w, la variable proportionnelle

$$w' = we^{-i\theta}.$$

Alors la fonction

$$F(w) = F(w'e^{i\theta}) = F_1(w')$$

aura pour période, par rapport à w', la quantité réelle l.

Ainsi, on peut supposer que l'on ait multiplié w par un facteur tel que la période soit une quantité réelle l, et que les *bandes de convergence,* qui limitent l'étendue dans laquelle chaque développement est possible, deviennent toutes parallèles à l'axe des x.

Si l'on partage alors le plan en bandes verticales, de largeur l, par des parallèles à l'axe des y, la marche de la fonction $F_1(w')$ sera identique dans toutes les bandes verticales, comme nous en avons déjà vu un exemple au nº 83.

216. Si nous reprenons maintenant les notations du nº 200, en y faisant seulement $\lambda = l$, les formules deviendront

$$(5) \qquad F(w) = F(w + kl) = A_0 + A_1 e^{\frac{2\pi i w}{l}} + A_2 e^{\frac{4\pi i w}{l}} + \cdots$$
$$+ A_{-1} e^{-\frac{2\pi i w}{l}} + A_{-2} e^{-\frac{4\pi i w}{l}} + \cdots,$$

$$(6) \qquad A_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(\omega + ih) e^{\frac{2n\pi}{l}(h - i\omega)} d\omega.$$

Enfin, par un changement de variable, on peut amener l'axe des x à l'intérieur de la bande de convergence, et alors rien n'empêche de supposer $h = 0$. La formule (6) se simplifie, et l'on a

$$(7) \qquad A_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(\omega) e^{-\frac{2n\pi i\omega}{l}} d\omega.$$

217. Les formules (5) et (7) donnent, comme cas particulier, le développement en série périodique d'une fonction quelconque de la variable réelle w, dont on connaît toutes les valeurs dans l'intervalle compris entre $w = 0$ et $w = l$.

On démontre même que les formules subsistent lorsqu'on fait passer l'axe des x par des points de discontinuité de la fonction, pourvu que ces discontinuités soient telles que la fonction $F(w)$ reste toujours uniforme et finie. Cela revient à dire que les formules (5) et (7) subsistent encore, pourvu que ces points (nécessairement de *seconde espèce*) ne soient pas des infinis.

Si pour une valeur $w = a$, la fonction $F(w)$ passe brusquement d'une valeur finie b à une valeur finie différente c, le développe-

ment représentera, pour $w = a$, la demi-somme des valeurs b et c, c'est-à-dire

$$\lim \frac{F(a-\varepsilon) + F(a+\varepsilon)}{2} .$$

La démonstration directe de ce théorème, qui n'appartient plus, à proprement parler, à la théorie des quantités complexes, se trouve dans la plupart des Traités de Calcul intégral. Elle est présentée avec plus de développement et de rigueur dans les Mémoires de Lejeune-Dirichlet (*Crelle's Journal*, T. IV, p. 94, et *Dove's Repertorium der Physik*. T. I, p. 152), et dans le *Compendium der höheren Analysis* de Schlömilch, 2e éd. (T. II, p. 115.) *Voy.* encore le Mémoire posthume de Riemann, intitulé : *Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.*

§ III.

Séries de Bürmann et de Lagrange.

218. Nous avons vu (art. 149) que si $\mathfrak{f}(w)$ est une fonction de w, uniforme et continue pour toutes les valeurs de cette variable renfermées dans un certain cercle $\mathfrak{C}$ (que nous supposerons, pour plus de simplicité, avoir son centre à l'origine O), cette fonction pourra se développer en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de w,

$$(1) \qquad \mathfrak{f}(w) = A_0 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots$$

Supposons maintenant que l'on change de variable, et que w représente une fonction donnée

$$w = \varphi(z)$$

de la nouvelle variable z, qui soit uniforme et continue dans une portion du plan, laquelle renferme nécessairement le point z_0 correspondant à l'origine de w et tel que

$$\varphi(z_0) = 0 .$$

Si l'on fait

$$\mathfrak{f}(w) = \mathfrak{f}[\varphi(z)] = F(z) ,$$

$F(z)$ sera une fonction de z uniforme et continue tout autour du point z_0, dans toute l'étendue où les fonctions φ et $\mathfrak{f}$ seront elles-mêmes uniformes et continues.

Si l'on substitue pour w sa valeur dans l'équation (1), on obtiendra pour $F(z)$ un développement ordonné suivant les puissances entières et positives de la fonction $\varphi(z)$,

$$(2)\qquad F(z) = A_0 + A_1\varphi(z) + A_2[\varphi(z)]^2 + \cdots .$$

Il reste maintenant à trouver l'expression des coefficients A_n du développement, et à déterminer l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$ où doivent être renfermées les valeurs de z.

219. Considérons le résidu [1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_z \frac{F'(\zeta)d\zeta}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} .$$

Tant que la dérivée $\varphi'(z)$ ne s'annulera pas dans l'aire $\mathfrak{A}$ considérée, la valeur de ce résidu sera (art. 140)

$$\lim_{\zeta=z}(\zeta - z)\frac{F'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} = \frac{\lim F'(\zeta)}{\lim \dfrac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta - z}} = \frac{F'(z)}{\varphi'(z)} .$$

Si, dans la même aire, le module de $\varphi(\zeta)$, pour un point quelconque ζ du contour, est constamment plus grand que le module de $\varphi(z)$, on pourra développer $\dfrac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}$ en une série convergente, suivant les puissances de $\varphi(z)$,

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(\zeta)}\left[1 + \frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)} + \left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)}\right)^2 + \cdots\right],$$

d'où, en multipliant par $\frac{1}{2\pi i}F'(\zeta)d\zeta$, et intégrant tout le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$,

$$(3)\qquad \frac{F'(z)}{\varphi'(z)} = B_1 + B_2\varphi(z) + B_3[\varphi(z)]^2 + \cdots ,$$

les coefficients de ce développement étant donnés par la formule (art. 168)

---

[1] *Voy.* PUISEUX, *Recherches sur les fonctions algébriques* (*Journal de Liouville*, t. XV, p. 381, 1850).

(4) $$B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{F'(\zeta)\,d\zeta}{[\varphi(\zeta)]^n} = \mathcal{E}_{z_0} \frac{F'(\zeta)}{[\varphi(\zeta)]^n},$$

$\zeta = z_0$ étant le seul infini de la fonction sous le signe $\mathcal{E}$, pourvu que, comme nous le supposerons, l'équation $\varphi(z) = 0$ n'ait pas d'autre racine que $z = z_0$ dans l'aire $\mathfrak{A}$.

220. La condition

$$\text{mod.}\,\varphi(\zeta) > \text{mod.}\,\varphi(z)$$

sera remplie, si l'on prend pour contour de $\mathfrak{A}$ la courbe que l'on détermine en égalant le module de $\varphi(z)$ à la plus petite des valeurs de ce module qui correspondent aux diverses racines de l'équation $\varphi'(z) = 0$.

En effet, le module R de $\varphi(z)$, qui s'annule pour $z = z_0$, va nécessairement en croissant, lorsqu'on part de ce point, puisqu'il ne peut recevoir de valeurs négatives. Traçons autour de z_0 une suite de courbes que nous désignerons par (R), dont chacune correspondra à une valeur constante de ce module R. Si l'on pose, u et v étant réels,

$$w = \varphi(z) = u + iv,$$

l'équation générale de ces courbes sera

$$u^2 + v^2 = R^2.$$

Deux courbes quelconques de cette suite ne se couperont pas, sans quoi il faudrait que $u^2 + v^2$ admît deux valeurs différentes pour le point d'intersection, et alors u et v, et par suite $\varphi(z)$ ne seraient plus des fonctions uniformes. Donc ces courbes iront en s'élargissant à mesure que le module R croîtra, et chacune renfermera entièrement toutes les précédentes.

Il en sera de même tant que le module R n'aura pas atteint un maximum. Or, pour ce maximum on doit avoir

$$d(u^2 + v^2) = 0,$$

ou, en reprenant les notations de l'article 106,

$$(uX + vY)\,dx + (vX - uY)\,dy = 0.$$

x et y étant deux variables indépendantes, il en résulte

$$uX + vY = 0,$$
$$vX - uY = 0,$$

d'où

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

et par suite

$$\varphi'(z) = X + iY = 0.$$

Donc, *toutes les fois que le module d'une fonction* $\varphi(z)$ *passe par un maximum (ou par un minimum), la dérivée* $\varphi'(z)$ *de la fonction s'annule.*

Il s'ensuit de là que, si R_1 est le plus petit des modules de $\varphi(z)$ qui correspondent aux diverses racines de l'équation $\varphi'(z) = 0$, R_1 sera égal au plus petit des modules maxima, ou lui sera inférieur. Si donc on prend pour contour de $\mathfrak{A}$ la courbe (R_1), donnée par l'équation

$$u^2 + v^2 = R_1^2,$$

$\varphi'(z)$ sera différent de zéro dans toute l'étendue de cette aire, et, si z est un point de l'intérieur et ζ un point du contour, on aura toujours.

$$\text{mod}\,\varphi(\zeta) > \text{mod}\,\varphi(z).$$

Si, de plus, la courbe (R_1) est contenue tout entière dans l'*aire de continuité* $\mathfrak{B}$ de la fonction $F(z)$ et par suite de sa dérivée $F'(z)$ (art. 147), la fonction $\frac{F'(z)}{\varphi'(z)}$ sera uniforme et continue dans toute l'aire limitée par (R_1), et le développement donné par les formules (3) et (4) sera possible.

Si (R_1) sortait de l'aire $\mathfrak{B}$ dans laquelle $F(z)$ est uniforme et continue, on remplacerait (R_1) par une autre courbe (R_1') de la suite (R), correspondante à un module $< R_1$, et contenue entièrement dans $\mathfrak{B}$.

221. Cela posé, multiplions les deux membres de l'équation (3) par $\varphi'(z)\,dz$, et intégrons de part et d'autre entre les limites z_0 et z (art. 133). Si l'on pose

$$A_0 = F(z_0), \qquad A_n = \frac{B_n}{n},$$

en remarquant que $\varphi(z_0) = 0$, il viendra

$$(5) \qquad F(z) = A_0 + A_1\varphi(z) + A_2[\varphi(z)]^2 + \cdots,$$

les coefficients A_n ayant pour expression générale

$$(6)\quad A_n = \frac{1}{n}\mathcal{L}_{z_0}\frac{F'(\zeta)}{[\varphi(\zeta)]^n} = \frac{1}{n!}\lim_{\zeta=z_0} \mathrm{D}_\zeta^{n-1}\frac{(\zeta-z_0)^n F'(\zeta)}{[\varphi(\zeta)]^n}$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{\varepsilon=0} \mathrm{D}_\varepsilon^{n-1}\frac{\varepsilon^n F'(z_0+\varepsilon)}{[\varphi(z_0+\varepsilon)]^n}\,.$$

Ces formules représentent la série de Bürmann. *Voy.* le tome II des *Mémoires de l'Institut,* an VII, page 14.

222. Pour obtenir la formule (5), nous avons intégré deux fois une série convergente, et nous avons admis que la série résultante est convergente. On pourrait le déduire d'une proposition générale analogue à celle que l'on démontre pour les séries de quantités réelles, et qui s'établirait de la même manière. On peut aussi s'en assurer, comme nous l'avons fait pour les théorèmes de Cauchy et de Laurent, par la considération du reste de la série.

Si l'on arrête au $n^{\text{ième}}$ terme le développement de $\frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}$, le reste de la série sera exactement égal à

$$\frac{[\varphi(z)]^n}{[\varphi(\zeta)]^n\,[\varphi(\zeta)-\varphi(z)]}\,,$$

et par suite le reste de la série (3) sera

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi i}[\varphi(z)]^n\int_{\mathfrak{A}}\frac{F'(\zeta)\,d\zeta}{[\varphi(\zeta)]^n\,[\varphi(\zeta)-\varphi(z)]}\,.$$

Le module P de $\varphi(\zeta)$ est constant et plus grand que le module R de $\varphi(z)$. On voit donc, en faisant sortir P du signe $\int$, que cette quantité se réduit à une fonction finie de z et de ζ, multipliée par $\left(\frac{R}{\mathrm{P}}\right)^n$, c'est-à-dire par un facteur infiniment petit pour n infini. Donc la série (3) est convergente.

On obtiendra maintenant le reste de la série (5) en multipliant l'expression infiniment petite (7) par $\varphi'(z)\,dz = d\varphi(z)$, et intégrant entre les limites z_0 et z. Si l'on pose $\varphi(z) = R\,\chi(z)$, R étant le module correspondant à la limite supérieure z, on obtiendra pour résultat une intégrale finie multipliée encore par le facteur infiniment petit $\left(\frac{R}{\mathrm{P}}\right)^n$, et l'on en conclura que la série (5) est également convergente.

On pourrait remarquer que le reste de la série (5) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{F'(\zeta)d\zeta}{[\varphi(\zeta)]^n}\int_0^{\varphi(z)} \frac{Z^n dZ}{\varphi(\zeta)-Z},$$

expression qu'il serait facile de transformer en effectuant l'intégration par rapport à Z. On obtiendrait ainsi le reste de la série de Bürmann sous la forme d'un résidu intégral, comme on l'a fait pour la série de Cauchy (art. 149). Nous n'insisterons pas davantage sur cette formule, trop compliquée pour être d'une utilité pratique.

223. Donnons quelques applications de la série de Bürmann.

I. Supposons

$$\varphi(z) = (z-a)(z-b).$$

Les courbes (R) seront données par l'équation

$$\text{mod.}(z-a)(z-b) = R,$$

ou

$$\text{mod.}(z-a)\times\text{mod.}(z-b) = R.$$

Or mod. $(z-a)$ et mod. $(z-b)$ sont les distances du point z aux deux points a et b. Ces courbes jouissent donc de la propriété que le produit des distances de chacun de leurs points aux deux points fixes a, b est constant. Ce sont donc des ovales de Cassini. Pour R moindre que le carré de la moitié de la distance $\overline{ab}$ des deux foyers, chaque courbe se compose de deux ovales séparées, entourant l'une le point a, l'autre le point b. Pour $R = \left(\frac{1}{2}\overline{ab}\right)^2$, les deux ovales se rejoignent pour former une lemniscate. Pour une valeur de R plus grande, on a une courbe unique, renfermant les deux zéros a et b de la fonction.

La dérivée $\varphi'(z) = 2z-a-b$ s'évanouit pour $z = \frac{a+b}{2}$, expression qui, substituée dans $\varphi(z)$, donne pour valeur du module

$$\text{mod.}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\overline{ab}\right)^2 \cdot$$

Il faut donc prendre $R < \left(\frac{1}{2}\overline{ab}\right)^2$, et par suite choisir pour $\mathfrak{A}$ celle des deux ovales dont se compose alors la courbe, qui entoure le foyer dont z doit être le plus voisin, le foyer a, par exemple.

On a alors, en supposant cette ovale assez petite pour que la fonction $F(z)$ reste uniforme et continue à son intérieur,

$$F(z) = F(a) + A_1(z-a)(z-b) + A_2(z-a)^2(z-b)^2 + \cdots,$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \lim_{\zeta=a} D_\zeta^{n-2} \frac{F'(\zeta)}{(\zeta-b)^n}$$
$$= \frac{1}{n!} D_a^{n-1} \frac{F'(a)}{(a-b)^n}.$$

Soit, par exemple,

$$a=0, \quad b=1, \quad F(z)=(1-z)^\mu,$$

d'où $R < \frac{1}{4}$; et supposons que la fonction $F(z)$, uniforme dans l'aire $\mathfrak{A}$ qui ne renferme pas le point de ramification $z=1$, parte du point $z=0$ avec la valeur initiale $1^\mu = 1$. Il viendra

$$(1-z)^\mu = 1 - \frac{\mu}{1} z(1-z) + \frac{\mu(\mu-2)}{2!} z^2(1-z)^2$$
$$- \frac{\mu(\mu-3)(\mu-4)}{3!} z^3(1-z)^3 + \cdots.$$

224. II. *Inversion des fonctions*.

Étant donnée entre w et z une équation de la forme

$$w = \varphi(z),$$

la série de Bürmann permet de développer z, ou plus généralement une fonction donnée $F(z)$ de z, en une série ordonnée suivant les puissances de w, ce qui donne l'expression de la fonction *inverse* de la fonction φ. La valeur de z en fonction de w pouvant offrir plusieurs déterminations, on obtiendra plusieurs formes de développement, correspondantes aux différentes aires $\mathfrak{A}$ qui entourent les diverses racines z_0 de l'équation $\varphi(z)=0$, et à l'intérieur de chacune desquelles z est une fonction uniforme de w.

Soit, par exemple, l'équation

$$w = ze^{-z}.$$

On a ici $z_0 = 0$, $\varphi'(z) = (1-z)e^{-z}$. Pour la racine $z=1$ de $\varphi'(z)=0$, on a mod. $\varphi(z) = \frac{1}{e}$. Le contour à l'intérieur duquel doit se mouvoir z est donc déterminé par l'équation

$$\text{mod. } ze^{-z} = \frac{1}{e},$$

ou

$$x^2 + y^2 = e^{2(x-1)}.$$

Pour un point de l'intérieur de ce contour, on aura

$$F(z) = F(0) + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots,$$

$$A_n = \lim_{\zeta=0} \frac{1}{n!} D_\zeta^{n-1} \left[e^{n\zeta} F'(\zeta) \right].$$

225. III. *Série de Lagrange.*

La quantité z étant donnée par une équation de la forme

$$z = c + wf(z),$$

on propose de développer z, ou plus généralement $F(z)$ suivant les puissances de w.

On aura dans ce cas

$$w = \varphi(z) = \frac{z-c}{f(z)},$$

d'où l'on tire $z_0 = c$, en admettant que $f(c)$ ne soit pas nul. L'équation $\varphi'(z) = 0$ devient, en supposant que $f(z)$ reste fin dans l'aire considérée,

$$f(z) - (z-c)f'(z) = 0.$$

Parmi les racines de cette équation, on prendra celle qui donnera pour mod. $\frac{z-c}{f(z)}$ la plus petite valeur R_1, et le contour de l'aire où z devra être contenu sera déterminé par l'équation

$$\text{mod.} \frac{z-c}{f(z)} = R_1.$$

On aura alors

$$F(z) = F(c) + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots,$$

$$A_n = \frac{1}{n!} D_c^{n-1} \left\{ F'(c) \cdot [f(c)]^n \right\}.$$

Soit, en particulier, l'équation du problème de Kepler.

$$c = z - w \sin z,$$

c représentant l'anomalie excentrique, z l'anomalie moyenne, et w l'excentricité. L'équation $\varphi'(z) = 0$ devient ici

$$\frac{\sin z - (z-c)\cos z}{\sin^2 z} = 0$$

ou

$$z - c - \operatorname{tang} z = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$x + iy - \frac{\operatorname{tang} x + i\operatorname{Th} y}{1 - i \operatorname{tang} x \operatorname{Th} y} = c$$

équation qui se partage, pour c réel, en deux autres,

$$x - c = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{Ch} 2y} , \qquad y = \frac{\operatorname{Sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{Ch} 2y} .$$

Ne pouvant résoudre ces équations tant que la valeur numérique de c n'est pas donnée, cherchons du moins quelle est la plus petite valeur que puisse recevoir le module de w, pour une valeur quelconque de c.

La seconde des équations précédentes peut se mettre sous la forme

$$2\sin^2 x = 1 - \frac{\operatorname{Sh} 2y}{y} + \operatorname{Ch} 2y .$$

Le second membre croissant avec y, et le premier membre ayant pour valeur maximum 2, il s'ensuit que y ne pourra surpasser la racine réelle de l'équation

$$1 = \operatorname{Ch} 2y - \frac{\operatorname{Sh} 2y}{y} ,$$

ou

$$\frac{1}{y} = \frac{\operatorname{Ch} 2y - 1}{\operatorname{Sh} 2y} = \operatorname{Th} y ,$$

ou enfin

$$y = \frac{1}{\operatorname{Th} y} .$$

Cette équation, résolue par interpolation à l'aide d'une Table de fonctions hyperboliques (1) donne approximativement

$$y = 1,1997.$$

---

(1) *Voy.*, par exemple, notre *Recueil de Formules et de Tables numériques*, page 50.

en posant

$$(2)\quad C^{(h)} = \mathcal{E}_c \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - c)^{n-h+1}} = \frac{\varphi^{(n-h)}(c)}{(n-h)!} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{D_\varepsilon^{n-h}\left[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)\right]}{(n-h)!}.$$

214. Il reste à calculer maintenant la première intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

prise le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$. Supposons d'abord que les infinis c_1, c_2, ... soient tous contenus dans une aire limitée $\mathfrak{A}$, et qu'il reste sur la sphère (Chap. IV), autour du point O′ correspondant à $z = \infty$, une aire finie $\mathfrak{A}'$, qui ne contienne aucun infini de $f(z)$, si ce n'est peut-être le point O′ lui-même. Transformons les ζ du plan horizontal en ζ' du plan antipode, en posant

$$\zeta = \frac{1}{\zeta'};$$

l'intégrale précédente prendra la forme

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} \frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)d\zeta'}{\zeta'^2\left(\frac{1}{\zeta'} - z\right)},$$

et elle devra être prise en tournant autour de O′ de l'est à l'ouest. Pour la ramener au même sens que les intégrales du plan horizontal, changeons son signe, et elle deviendra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} \frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)d\zeta'}{\zeta'\,(1 - z\zeta')} = \mathcal{E}_0 \frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta'(1 - z\zeta')}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0 f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[1 + z\zeta' + z^2\zeta'^2 + \cdots + z^\nu\zeta'^\nu + K\zeta'^{\nu+1}\right],$$

ν étant l'indice de l'infini O′ pour lequel $\zeta = \infty$ ou $\zeta' = 0$, et K étant une quantité qui ne devient pas infinie pour $\zeta' = 0$. En posant

$$\zeta'^\nu f\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = \chi(\zeta'),$$

cette fonction $\chi(\zeta')$ sera continue dans le voisinage de $\zeta' = 0$. L'intégrale précédente pouvant s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0 \chi(\zeta')d\zeta'\left[\frac{1}{\zeta'^{\nu+1}}+\frac{z}{\zeta'^{\nu}}+\cdots+\frac{z^\nu}{\zeta'}+K\right],$$

et la fonction $K\chi(\zeta')$ restant finie pour $\zeta'=0$, le résidu de cette fonction sera nul, et, en remettant pour l'intégrale son expression primitive, il viendra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}=\mathcal{E}_0\frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta'(1-z\zeta')}=B_0+B_1z+\cdots+B_\nu z^\nu,$$

en posant

$$(3)\qquad B_h=\mathcal{E}_0\frac{\chi(\zeta')}{\zeta'^{\nu-h+1}}=\lim_{\zeta'=0}\frac{D_{\zeta'}^{\nu-h}\left[\zeta'^{\nu}f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]}{(\nu-h)!}.$$

L'ordre ν de l'infini $\zeta=\infty$ de la fonction $f(\zeta)$, lorsque cette fonction est rationnelle, est égal à l'excès du degré du numérateur sur celui du dénominateur.

Si les deux termes sont de même degré, l'expression précédente se réduit à une constante, savoir, à $f(\infty)$ ou au rapport des coefficients des plus hautes puissances de z dans les deux termes.

Si le numérateur est de degré moindre que le dénominateur, O′ n'est plus un infini de la fonction

$$\frac{1}{\zeta'}f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=\zeta f(\zeta),$$

et par suite le résidu de cette fonction pour $\zeta'=0$ est nul. La fonction $f(z)$ se réduit alors à

$$\Sigma\,\mathcal{E}_c\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}.$$

215. Donc, si $f(z)$ est une fonction dont tous les infinis, à l'exception de $z=\infty$, soient contenus dans une aire finie $\mathfrak{A}$, et si $n_1, n_2, \ldots, \nu$ sont les indices respectifs des infinis $c_1, c_2, \ldots, \infty$, $f(z)$ pourra se mettre sous la forme

$$(4)\qquad \begin{aligned} f(z) &= B_0+B_1z+\cdots+B_\nu z^\nu \\ &+\Sigma\left(\frac{C'}{z-c}+\frac{C''}{(z-c)^2}+\cdots+\frac{C^{(n)}}{(z-c)^n}\right), \end{aligned}$$

le signe Σ s'étendant nécessairement à tous les infinis $c_1, c_2, \ldots,$

et les coefficients B_k et $C^{(k)}$ étant déterminés par les formules (3) et (2) [1].

Si l'indice ν était négatif, la première ligne du développement disparaîtrait.

On voit que, si le nombre des infinis $c_1, c_2, \ldots$ est limité, et que les indices $n_1, n_2, \ldots, \nu$ aient tous des valeurs finies, la fonction $f(z)$ est nécessairement une fonction rationnelle, comme nous l'avions déjà établi d'une autre manière (art. 186). La formule (4) donne alors la décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples.

Dans le cas contraire, le développement de $f(z)$ se composerait d'une infinité de termes. Pour pouvoir faire usage de ce développement, il faut s'assurer préalablement de sa convergence.

216. *Formule d'interpolation de Lagrange.*
Soit

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)},$$

$F(z)$ étant une fonction entière, de degré moindre que le degré n du dénominateur. On est alors dans le cas où la partie entière du développement de $f(z)$ disparaît. On aura donc simplement

$$\begin{aligned} f(z) &= \Sigma \mathcal{E}_{z_h} \frac{F(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_n)} \cdot \frac{1}{z-\zeta} \\ &= \Sigma \lim_{\zeta=z_h} \frac{(\zeta-z_h)F(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_n)} \cdot \frac{1}{z-\zeta} \\ &= \Sigma \frac{F(z_h)}{(z_h-z_1)\cdots(z_h-z_{h-1})(z_h-z_{h+1})\cdots(z_h-z_n)} \cdot \frac{1}{z-z_h}. \end{aligned}$$

En mettant pour $f(z)$ sa valeur, on tire de là une expression de $F(z)$, qui n'est autre chose que la formule d'interpolation de Lagrange.

217. Prenons encore pour exemple la fonction

$$\cot \frac{1}{z},$$

---

[1] *Voy.* art. 158.

qui a pour infinis toutes les valeurs de z de la forme

$$z = \frac{1}{n\pi}.$$

Choisissons pour contour de l'aire une courbe qui entoure tous ces infinis, à l'exception de celui qui répond à $n = 0$, et par suite à $z = \infty$, et qui est le point O'. On aura, par la formule de l'art. 215,

$$\cot\frac{1}{z} = \mathcal{E}_0 \frac{\cot\zeta'}{\zeta'(1-z\zeta')} + \sum_1^\infty \left(\mathcal{E}_{\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}}{z-\zeta} + \mathcal{E}_{-\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}}{z-\zeta} \right).$$

D'ailleurs, $\cot\zeta'$ étant infini du premier ordre pour $\zeta' = 0$, on a

$$\mathcal{E}_0 \frac{\cot\zeta'}{\zeta'(1-z\zeta')} = \lim_{\zeta'=0} \left[D_{\zeta'}(\zeta'\cot\zeta') + z.\zeta'\cot\zeta' \right] = z.$$

Ensuite

$$\mathcal{E}_{\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \varepsilon . \frac{\cot\dfrac{1}{\frac{1}{n\pi}+\varepsilon}}{z-\frac{1}{n\pi}-\varepsilon} \right\}$$
$$= -\frac{1}{n\pi}.\frac{1}{n\pi z - 1}.$$

Donc

$$\cot\frac{1}{z} = z - \frac{1}{n\pi}\sum_1^\infty \left[\frac{1}{n\pi z - 1} + \frac{1}{n\pi z + 1} \right]$$
$$= z\left[1 - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2\pi^2 z^2 - 1} \right].$$

De ce développement dont il est facile de constater la convergence, on tirerait aisément ceux de $\cot z$, $\operatorname{tang} z$, etc., en remplaçant z par $\frac{1}{z'}$, puis z' par $\frac{\pi}{2} - z'$, etc.

218. Si la fonction $f(z)$ a un nombre illimité d'infinis, correspondants à des valeurs de z indéfiniment croissantes, alors les infinis, sur la sphère, se presseront autour du point O' avec une densité infinie, et l'on ne pourra plus toujours appliquer à l'évaluation de cette intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ le procédé du n° 214.

On peut, dans certains cas, effectuer simplement cette évaluation.

Prenons pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne de dimensions infinies, qui ne passe par aucun des infinis de $f(\zeta)$. On peut alors écrire l'intégrale sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\cdot\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}.$$

Pour ζ infini et z fini, le facteur $\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}$ différera infiniment peu de l'unité, et par suite on n'altérera qu'infiniment peu l'intégrale en le supprimant. On pourra donc, dans ce cas, toutes les fois que cette intégrale aura une valeur finie, remplacer la formule (1) par la formule

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}+\Sigma\,\mathcal{E}_c\,\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}. \tag{5}$$

L'intégrale $\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}$ est une constante, indépendante de z, mais qui peut dépendre de la forme choisie pour la courbe infinie qui limite l'aire $\mathfrak{A}$. La somme de résidus $\Sigma\,\mathcal{E}_b\,\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}$, relative à tous les infinis *renfermés dans l'aire* $\mathfrak{A}$, sera en même temps dépendante de la forme de cette courbe. Alors le développement de la fonction en une somme infinie de fractions simples ne pourra pas se faire sans tenir compte du terme complémentaire représenté par la première intégrale.

Mais si, en donnant au contour de $\mathfrak{A}$ une forme symétrique par rapport à l'origine, il arrive que cette intégrale prenne une valeur constante, indépendante de la nature de la courbe symétrique, nulle par exemple, comme cela a lieu lorsque $f(z)$ est une fonction *impaire* de z, alors, en associant deux à deux les résidus correspondants à des infinis symétriquement placés, on aura un développement convergent de la fonction $f(z)$, sous forme d'une suite infinie de fractions simples.

219. Soit, par exemple, la fonction

$$\operatorname{coséc} z.$$

Les infinis de cette fonction, qui sont les zéros de $\sin z$, sont situés

tous sur l'axe de x, aux distances $\pm n\pi$ de l'origine. Prenons pour contour de l'aire une courbe infinie quelconque qui ait pour centre l'origine, et qui coupe l'axe des x entre deux infinis consécutifs, de sorte que coséc ζ ne soit infini en aucun point du contour. L'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{\operatorname{coséc} \zeta}{\zeta} d\zeta,$$

prise le long de cette courbe aura, en deux points diamétralement opposés, des éléments égaux et de signe contraire, coséc ζ étant une fonction impaire de ζ. Donc cette intégrale sera nulle, et l'on aura simplement

$$\operatorname{coséc} z = \lim \Sigma \mathcal{E}_{n\pi} \frac{\operatorname{coséc} \zeta}{z-\zeta},$$

la somme devant être prise entre deux valeurs de n égales et de signe contraire, et qui tendent vers l'infini.

On a d'ailleurs

$$\mathcal{E}_{n\pi} \frac{\operatorname{coséc} \zeta}{z-\zeta} = \lim (\zeta - n\pi) \cdot \frac{\operatorname{coséc} \zeta}{z-\zeta} = \lim \left(\varepsilon \frac{\operatorname{coséc} (n\pi + \varepsilon)}{z - n\pi - \varepsilon} \right)$$

$$= \lim \frac{(-1)^n}{z - n\pi - \varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} = \frac{(-1)^n}{z - n\pi}.$$

Donc

$$\operatorname{coséc} z = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

En remplaçant z par $\frac{\pi}{2} - z$, on en tire

$$\operatorname{séc} z = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z - \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi} = \pi \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - z^2}.$$

En changeant z en iz dans ces deux formules, on aurait les développements de $\frac{1}{\operatorname{Sh} z}$, $\frac{1}{\operatorname{Ch} z}$.

§ V.

Développement des fonctions en produits infinis.

220. Appliquons au développement de la fonction

$$F(z) = D_z \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

la formule du § précédent,

$$F(z) = \Sigma \mathcal{L}_c \frac{F(\zeta)}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

la fonction $f(z)$ étant supposée uniforme dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

La fonction dérivée $f'(z)$ a les mêmes infinis que la fonction $f(z)$ (art. 147); donc $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ne peut devenir infinie que pour les valeurs qui rendent $f(z)$ ou infinie ou nulle.

Soit c un zéro ou un infini de $f(z)$, m son indice, positif ou négatif (art. 162). La fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = \varphi(z)$$

sera finie, continue et différente de zéro pour $z = c$ (art. 160 et 161). Donc

$$\varphi'(z) = \frac{f'(z)}{(z-c)^m} - \frac{m f(z)}{(z-c)^{m+1}}$$

sera aussi continue pour $z = c$. Il en sera de même, par conséquent, de

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{m}{z-c}.$$

Donc $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est égal à $\frac{m}{z-c}$, plus une fonction finie et continue pour $z = c$. Le terme $\frac{m}{z-c}$ étant infiniment grand du premier ordre, tandis que l'autre partie est finie, on en conclut que, *pour*

toute valeur $z = c$ qui rend la fonction $f(z)$ nulle ou infinie, la fonction

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{D}_z \log f(z)$$

deviendra infiniment grande du premier ordre.

D'après ce que nous avons vu (art. 213 et 215), le résidu

$$\mathcal{E}_c \frac{\mathrm{D}_\zeta \log f(\zeta)}{z-\zeta}$$

est égal à la partie de la fonction $\mathrm{D}_z \log f(z)$ qui devient infinie pour $z = c$, c'est-à-dire à $\frac{m}{z-c}$, comme il est aisé de le vérifier, en calculant directement

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c d\zeta\left[\frac{m}{(\zeta-c)(z-\zeta)} + \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)(z-\zeta)}\right].$$

Donc

$$\Sigma\,\mathcal{E}_c \frac{\mathrm{D}_\zeta \log f(\zeta)}{z-\zeta} = \Sigma \frac{m}{z-c}.$$

221. Il reste à calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{d\log(\zeta)}{\zeta - z}.$$

On pourra développer $\frac{1}{\zeta - z}$ en une série ordonnée suivant les puissances positives de z, le module de ζ sur le contour de $\mathfrak{A}$ pouvant toujours être supposé plus grand que le module de z. L'intégrale se présentera alors sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de z, le contour étant choisi de manière à ne passer par aucun des infinis de $\mathrm{D}_z \log f(z)$.

Si l'on suppose l'aire $\mathfrak{A}$ infinie dans toutes ses dimensions, on verra, comme au n° 218, que l'intégrale précédente a la même valeur que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{d\log f(\zeta)}{\zeta},$$

et par suite elle se réduit alors à une constante A, indépendante de z.

222. Cela posé, en désignant par A la valeur, variable ou constante, de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{d\log f(\zeta)}{\zeta - z},$$

on aura

$$D_z \log f(z) = \Sigma \frac{m}{z-c} + A.$$

En intégrant les deux membres entre les limites z_0 et z, z_0 n'étant ni un zéro ni un infini de $f(z)$, il vient

$$\log \frac{f(z)}{f(z_0)} = \Sigma \log\left(\frac{z-c}{z_0-c}\right)^m + \int_{z_0}^{z} A dz,$$

ou, si l'on suppose A constant,

$$\log \frac{f(z)}{f(z_0)} = \Sigma \log\left(\frac{z-c}{z-c_0}\right)^m + A(z-z_0).$$

On tire de là [1]

$$(1)\qquad f(z) = f(z_0). \Pi\left(\frac{z-c}{z_0-c}\right)^m. e^{\int_{z_0}^{z} A dz},$$

le produit Π s'étendant à tous les infinis contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$.

223. Soit, par exemple, la fonction

$$f(z) = \cos z.$$

On a

$$D_z \log f(z) = -\operatorname{tang} z.$$

Les seuls infinis de cette fonction sont les zéros de $\cos z$, donnés par la formule

$$z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

et comme ces zéros sont du premier ordre, on aura

$$\Sigma \mathcal{E}_c \frac{D_\zeta \log f(\zeta)}{z-\zeta} = \Sigma \frac{1}{z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

---

[1] L'intégrale de $d \log f(z)$ dépend du chemin suivi pour passer de z_0 en z, et les valeurs que l'on obtient pour $\log f(z)$ pourront différer d'un multiple de $2\pi i$. Il en est de même pour l'intégrale du second membre. Mais des multiples de $2\pi i$ ne peuvent avoir aucune influence, lorsqu'on vient à repasser des logarithmes aux nombres.

Si l'on prend maintenant pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne infinie, symétrique par rapport à l'origine, on aura

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{\operatorname{tang} \zeta \, d\zeta}{\zeta} = 0.$$

Donc $A = 0$, et l'on aura

$$D_z \log \cos z = -\operatorname{tang} z = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi},$$

d'où

$$\log \frac{\cos z}{\cos z_0} = \sum_{-\infty}^{\infty} \log \frac{z - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{z_0 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi},$$

ou, en faisant $z_0 = 0$,

$$\log \cos z = \sum_{-\infty}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}\right) = \sum_{0}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}\right).$$

Donc enfin

$$\cos z = \prod_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}\right).$$

224. Soit encore la fonction

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

d'où

$$D_z \log f(z) = \cot z - \frac{1}{z}.$$

On trouve encore $A = 0$ pour cette fonction. Les zéros de $\frac{\sin z}{z}$ sont du premier ordre, et ont lieu pour $z = n\pi$. Donc, l'indice n devant recevoir toutes les valeurs entières, zéro excepté,

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right),$$

ou

$$\sin z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

§ VI.

Calcul des intégrales définies.

225. Nous avons vu (Chap. II) que si U et V sont deux fonctions de x et de y, uniformes et continues dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, et si, de plus, elles satisfont à la condition

$$D_y U = D_x V,$$

en vertu de laquelle $Udx + Vdy$ est une différentielle exacte, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} (Udx + Vdy),$$

prise le long du contour de $\mathfrak{A}$, est nulle.

Si les fonctions U, V, en restant toujours uniformes, cessaient d'être continues en des points $c_1, c_2, \ldots$, compris à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, entourons ces points de contours infiniment petits. En raisonnant alors comme au nº 139, on verra que l'intégrale prise le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$ se réduira à la somme

$$\Sigma \int_c (Udx + Vdy)$$

des valeurs-limites de toutes les intégrales prises le long de chaque contour infiniment petit tracé autour d'un des points de discontinuité contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$.

Ainsi, si U et V sont des fonctions de x, y, uniformes dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et continues dans toute cette même étendue, à l'exception des infinis $c_1, c_2, \ldots$; si, de plus, elles sont telles que $Udx + Vdy$ soit une différentielle exacte, on aura la formule fondamentale

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{A}} (Udx + Vdy) = \Delta,$$

en posant

$$(2) \qquad \Delta = \Sigma \int_c (Udx + Vdy),$$

le signe de sommation s'étendant, dans cette expression, à tous les points de discontinuité c contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$, et Δ étant nulle

toutes les fois que l'aire $\mathfrak{A}$ ne renferme aucun point de discontinuité.

226. Pour calculer l'intégrale

$$\int_c (U dx + V dy),$$

posons

$$x + iy - c = \rho e^{ip},$$

d'où, en faisant $c = a + ib$,

$$x - a = \rho \cos p, \qquad y - b = \rho \sin p,$$

et prenons pour contour infinitésimal le cercle de centre c et de rayon infiniment petit ρ. L'expression $U dx + V dy$ prendra la forme

$$F(\rho, p)\, dp,$$

et l'on aura

$$\int_c (U dx + V dy) = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} F(\rho, p)\, dp.$$

Soit, par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2},$$

prise le long du contour d'un carré ayant pour centre l'origine et dont les côtés sont parallèles aux axes et égaux à 2 unités. Le long de ce contour, l'intégrale deviendra

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{1+y^2} + \int_{+1}^{-1} \frac{-dx}{x^2+1} + \int_{+1}^{-1} \frac{-dy}{1+y^2}$$
$$= 4 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Or, les fonctions $\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{-y}{x^2+y^2}$ ont l'une et l'autre un point de discontinuité pour $x = 0$, $y = 0$. En calculant, par la transformation précédente, l'intégrale prise autour de ce point, on aura

$$\Delta = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2\, dp}{\rho^2} = 2\pi.$$

Donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

227. Si, en particulier, $Udx + Vdy$ est la différentielle d'une fonction $F(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$, on aura alors (n° 106)

$$U = F'(z), \qquad V = iF'(z),$$

d'où

$$U + iV = 0.$$

En faisant donc

$$U = f(z),$$

l'expression $Udx + Vdy$ se changera en $f(z)\,dz$, et $\frac{\Delta}{2\pi i}$ sera le résidu intégral de la fonction $f(z)$ relatif à l'aire $\mathfrak{A}$. On aura donc les formules

$$(3) \qquad \int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz = \Delta,$$

$$(4) \qquad \Delta = 2\pi i.\Sigma \mathcal{E}_0 f(z) = 2\pi i \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} f(z).$$

228. Pour faire usage des formules (1) et (3), sur lesquelles repose ce que Cauchy appelle la *Méthode du passage du réel à l'imaginaire*, on choisit le contour de l'aire $\mathfrak{A}$ de manière à pouvoir exprimer l'intégrale du premier membre à l'aide d'intégrales définies relatives à des variables réelles. En séparant ensuite de part et d'autre le réel de l'imaginaire, on obtiendra deux relations entre des intégrales définies réelles et des quantités connues, dès que l'on saura calculer Δ.

On prendra généralement pour contour une ligne telle qu'une seule des variables x et y, ou r et p varie à la fois, auquel cas on rencontre immédiatement des intégrales définies ordinaires. Pour cela, on composera, par exemple, le contour de parties circulaires ayant pour centre l'origine, ou de parties rectilignes parallèles aux axes. Dans le premier cas, le rayon vecteur r sera constant; dans le second, une seule des coordonnées x, y variera.

Examinons successivement plusieurs cas particuliers de cette méthode.

229. I. Si l'on prend pour contour un cercle de rayon r et de centre $c = a + ib$, et que l'on pose, comme au n° 226,

$$x = a + r\cos p, \qquad y = b + r\sin p,$$

la différentielle $Udx + Vdy$ prendra la forme $F(r,p)\,dp$, ou simplement $F(p)\,dp$, et l'intégrale proposée deviendra

$$\int_0^{2\pi} F(p)\,dp.$$

On aura donc la formule

$$\int_0^{2\pi} F(p)\,dp = \Delta,$$

qui se partagera en deux autres, si $F(p)$ est une fonction complexe de p.

Soit, par exemple, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{1-az}\,\frac{dz}{z},$$

$f(z)$ étant une fonction continue dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. La fonction

$$\frac{f(z)}{(1-az)z}$$

a d'abord l'infini $z = 0$, et de plus, si le point $z = \frac{1}{a}$ est contenu dans l'aire $\mathfrak{A}$, ce point sera un second infini. On aura donc

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{1-az}\,\frac{dz}{z} = 2\pi i\left[\mathcal{E}_0\,\frac{f(z)}{(1-az)z} + \mathcal{E}_{\frac{1}{a}}\,\frac{f(z)}{(1-az)z}\right].$$

Le premier résidu a pour valeur

$$\lim_{z=0}\left[z.\,\frac{f(z)}{(1-az)z}\right] = f(0).$$

Le second est nul si le point $\frac{1}{a}$ est extérieur à l'aire; si le point $\frac{1}{a}$ est contenu dans l'aire, il sera égal à

$$\lim_{z=\frac{1}{a}}\left[\left(z-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{f(z)}{(1-az)z}\right] = -f\left(\frac{1}{a}\right).$$

Donc la valeur de l'intégrale sera

$$2\pi i f(0), \qquad \text{ou} \qquad 2\pi i\left[f(0) - f\left(\frac{1}{a}\right)\right],$$

suivant que $\frac{1}{a}$ sera extérieur ou intérieur à l'aire.

Prenons maintenant pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon 1. Alors $z = e^{ip}$, $\frac{dz}{z} = i\,dp$, et il vient

$$\text{pour mod. } a < 1, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ip})\,dp}{1 - ae^{ip}} = 2\pi f(0);$$

$$\text{pour mod. } a > 1, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ip})\,dp}{1 - ae^{ip}} = 2\pi\left[f(0) - f\left(\frac{1}{a}\right)\right].$$

En supposant $f(z) = 1$ et a réel, il vient, suivant que a est < 1 ou > 1, en valeur absolue,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dp}{1 - ae^{ip}} = 2\pi \quad \text{ou} \quad = 0,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 - a\cos p)\,dp}{1 - 2a\cos p + a^2} = 2\pi \text{ ou} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin p\,dp}{1 - 2a\cos p + a^2} = 0.$$

230. Dans certains cas, on peut connaître *a priori* la valeur de Δ. Supposons, par exemple, que l'on sache développer, par un moyen quelconque, la fonction $F(z)$ de la variable complexe z en une série convergente pour tous les points de l'aire $\mathfrak{A}$, et ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z - c$. Le coefficient de la $n^{\text{ième}}$ puissance de $z - c$ aura pour expression (n° 149)

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{F(z)\,dz}{(z-c)^{n+1}}.$$

Si donc on connaît d'avance la valeur de ce coefficient A_n, on aura par là même la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{F(z)\,dz}{(z-c)^{n+1}} = 2\pi i . A_n,$$

ou, en prenant pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon r et de centre c, compris à l'intérieur du cercle de convergence,

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} F(c + re^{ip})e^{-inp}\,dp = 2\pi r^n . A_n.$$

Plus généralement, si l'on connaît le développement d'une fonc-

tion $F(z)$ en une série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $z-c$, et convergente dans tout l'intervalle compris entre deux cercles de centre c, on aura la même formule (5) pour toute valeur entière de n, positive, nulle ou négative, r étant le rayon vecteur d'un point quelconque situé entre les deux cercles.

Pour appliquer ces formules au calcul des intégrales définies, il suffira de séparer dans chaque membre, le réel de l'imaginaire, ce qui fournira deux relations.

Par exemple, du développement connu de la fonction

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n z^n}{n!} + \cdots$$

on tire, pour $n \geqq 0$,

$$\int_0^{2\pi} e^{-re^{ip}} e^{-nip}\, dp = 2\pi r^n . A_n = (-1)^n \frac{2\pi r^n}{n!},$$

formule qui se décompose en deux autres,

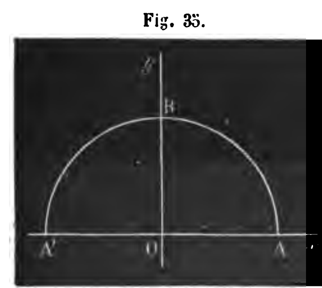
$$\int_0^{2\pi} e^{-r\cos p} \cos(r\sin p + np)\, dp = (-1)^n \frac{2\pi r^n}{n!}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-r\cos p} \sin(r\sin p + np)\, dp = 0.$$

Pour $n < 0$, la première intégrale serait nulle aussi bien que la seconde.

231. II. Prenons pour l'aire $\mathfrak{A}$ un demi-cercle ayant pour diamètre l'un des axes coordonnés, l'axe des x par exemple, et pour centre l'origine. En désignant par R le rayon de ce cercle, la formule (3) devient (*fig.* 35)

Fig. 35.



$$\int (A'A) + \int (ABA') = \Delta,$$

c'est-à-dire,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + i\int_0^{\pi} f(Re^{ip}) Re^{ip}\, dp = \Delta.$$

Supposons maintenant que $f(Re^{ip})$ soit infiniment petit d'ordre μ pour R infini. Alors la fonction $R^{\mu} f(Re^{ip})$ conservera, pour R croissant

indéfiniment, une valeur finie $\varphi(e^{ip})$. La seconde des intégrales précédentes pourra alors s'écrire sous la forme

$$i \cdot \frac{1}{R^{\mu-1}} \int_0^{\pi} \varphi(e^{ip}) dp.$$

La quantité sous le signe $\int$ restant toujours finie, l'intégrale sera pareillement finie, et, si l'on suppose

$$\mu > 1,$$

l'intégrale sera multipliée par un facteur infiniment petit. Donc on aura, pour $R = \infty$,

$$\lim. \, i \int_0^{\pi} f(Re^{ip}) Re^{ip} \, dp = 0,$$

et notre formule se réduira à la suivante,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \Delta, \tag{5}$$

Δ représentant le produit de $2\pi i$ par le résidu intégral de la fonction $f(z)$, relatif à tous les infinis situés au-dessus de l'axe des x.

232. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{z^{2m} \, dz}{1 + z^{2n}},$$

m et n étant deux entiers positifs, tels que l'on ait

$$m < n.$$

Alors $f(Re^{ip}) = \dfrac{R^{2m} e^{2mip}}{1 + R^{2n} e^{2nip}}$ est infiniment petit de l'ordre $2n - 2m > 1$. Par suite, la formule (5) est applicable, et l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} \, dx}{1 + x^{2n}} = \Delta.$$

Maintenant, les infinis situés au-dessus de l'axe des x sont celles des racines

$$c = e^{ip}$$

de l'équation

$$1 + z^{2n} = 0,$$

dans lesquelles le coefficient de i est positif, et que l'on obtiendra par conséquent en prenant pour p les valeurs

$$\frac{\pi}{2n}, \quad \frac{3\pi}{2n}, \quad \frac{5\pi}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Il vient alors

$$\Delta = 2\pi i (F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}),$$

en posant, pour abréger,

$$F_k = \mathcal{E}_{c_k} \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}}, \qquad c_k = e^{\frac{k\pi i}{2n}}.$$

On a, pour $z = c$,

$$F = \lim \frac{\varepsilon (c + \varepsilon)^{2m}}{1 + (c + \varepsilon)^{2n}} = \lim \frac{\varepsilon (c^{2m} + 2m\varepsilon c^{2m-1} + \cdots)}{1 + c^{2n} + 2n\varepsilon c^{2n-1} + \cdots},$$

ou, à cause de $1 + c^{2n} = 0$,

$$F = \lim \frac{\varepsilon c^{2m} + \cdots}{-2n\varepsilon . c^{-1} + \cdots} = -\frac{1}{2n} c^{2m+1}.$$

Donc, en faisant, pour abréger, $e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i} = \gamma$,

$$\Sigma F = -\frac{1}{2n}(\gamma + \gamma^3 + \cdots + \gamma^{2n-1}) = -\frac{1}{2n} \frac{\gamma^{2n} - 1}{\gamma - \gamma^{-1}}.$$

Or, pour n entier, $\gamma^{2n} = -1$. Donc

$$\Sigma F = \frac{1}{n} \frac{1}{\gamma - \gamma^{-1}} = \frac{1}{2in} \operatorname{coséc} \frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

Si l'on fait maintenant $R = \infty$, et que l'on suppose $m < n$, d'où $2m + 1 < 2n$, l'intégrale prise le long de la demi-circonférence s'évanouira, et il restera

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1 - x^{2n}} = \frac{\pi}{2n} \operatorname{coséc} \frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

En posant

$$x^{2n} = y, \qquad \frac{2m+1}{2n} = a,$$

la formule devient

$$\int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad (0 < a < 1).$$

233. Soit encore l'intégrale

$$\int \frac{e^{iz}}{ia-z}\,dz.$$

En faisant $z = Re^{ip}$, la fonction $f(z)$ devient

$$e^{-R\sin p} \cdot \frac{e^{iR\cos p}}{ia - Re^{ip}},$$

et pour toutes les valeurs de p comprises entre 0 et π, cette quantité est infiniment petite d'ordre infini, lorsqu'on fait $R = \infty$. Il reste à examiner ce que devient l'intégrale $i\int f(Re^{ip})\,Re^{ip}\,dp$ pour les valeurs de p très voisines de 0 ou de π, c'est-à-dire, à trouver la limite de l'expression

$$\int_0^\varepsilon e^{-R\sin p}\left(\frac{e^{iR\cos p}}{ia - Re^{ip}} - \frac{e^{-iR\cos p}}{ia + Re^{-ip}}\right) Re^{ip}\,dp.$$

Si l'on fait abstraction du facteur $e^{-R\sin p}$, l'expression sous le signe $\int$ peut se mettre sous la forme $(P+iQ)\cos p\,dp$, P et Q étant des fonctions de p, qui ne deviennent pas infinies avec R, et $\cos p$ restant voisin de l'unité. Donc l'intégrale proposée revient à

$$\int_0^\varepsilon e^{-R\sin p}\cos p\,dp\,.\,(P+iQ),$$

expression dont la valeur est égale à la quantité

$$\int_0^\varepsilon e^{-R\sin p}\cos p\,dp = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-R\sin\varepsilon}\right),$$

multipliée par une valeur moyenne de la fonction $P + iQ$, c'est-à-dire par une quantité finie. Donc l'intégrale s'annule pour R infini, et la formule (5) est applicable.

Pour $a > 0$, la fonction a, au-dessus de l'axe des x, l'infini $z = ia$, auquel correspond le résidu

$$\mathcal{E}_{ia} \frac{e^{iz}}{ia - z} = -e^{-a}.$$

Donc, pour $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{ia - x}\, dx = -2\pi i e^{-a}.$$

Si l'on change a en $-a$, la fonction n'aura plus d'infini au-dessus de l'axe des x, et l'on aura $\Delta = 0$, d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{ia + x}\, dx = 0.$$

En combinant ces intégrales par addition et soustraction, et séparant le réel de l'imaginaire, on en tire facilement les deux formules

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a},$$

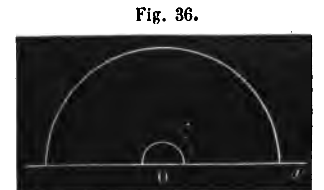
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi e^{-a}}{2},$$

Cette dernière donne, en faisant tendre a vers zéro,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

234. Si la fonction $f(z)$ a un infini en un point de l'axe des x, à l'origine $z = 0$ par exemple, l'axe des x faisant partie du contour, nous changerons alors la forme de ce contour, afin d'éviter le point O, en décrivant autour de ce point un demi-cercle de rayon infiniment petit r, et prenant pour aire l'espace compris entre les deux demi-cercles. On aura alors la formule

Fig. 36.



$$\int_r^R [f(x) + f(-x)]\, dx + i\int_0^{\pi} f(Re^{ip})\, Re^{ip}\, dp$$
$$- i\int_0^{\pi} f(re^{ip}) re^{ip}\, dp = \Delta.$$

Si la dernière intégrale $\int_0^\pi f(re^{ip})\, re^{ip}\, dp$ tend vers zéro en même temps que r, on se trouve alors dans le cas du nº 231, et si l'intégrale prise le long du demi-cercle extérieur s'évanouit pour $R=\infty$, on pourra appliquer la formule (5). Si la dernière intégrale tend vers une limite finie et déterminée, on joindra sa valeur, prise en signe contraire, à la valeur de Δ.

Soit, par exemple, la fonction

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$$

On a

$$\int_0^\pi f(re^{ip})\, re^{ip}\, dp = \int_0^\pi e^{ire^{ip}}\, dp.$$

En développant $e^{ire^{ip}}$ en série, et faisant $r=0$, on voit que cette intégrale a pour valeur π. On en conclut alors, en raisonnant comme au numéro précédent,

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{ix}}{x}-\frac{e^{-ix}}{x}\right) dx = \pi i,$$

c'est-à-dire,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

235. III. Prenons pour aire $\mathfrak{A}$ le rectangle parallèle aux axes (*fig.* 37), dont les côtés ont pour équations respectives

$$x=x_0, \quad x=X, \quad y=y_0, \quad y=Y.$$

Les formules (1) et (3) deviendront

$$(6) \qquad \int_{x_0}^X (U_{x,y_0}-U_{x,Y})\, dx + \int_{y_0}^Y (V_{X,y}-V_{x_0,y})\, dy = \Delta,$$

$$(7) \quad \int_{x_0}^X \left[f(x+iy_0)-f(x+iY)\right] dx + i\int_{y_0}^Y \left[f(X+iy)-f(x_0+iy)\right] dy = \Delta.$$

Si nous considérons l'intégrale double

$$\int_{x_0}^X \int_{y_0}^Y \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y F(x,y)\, dx\, dy,$$

elle aura pour expression soit

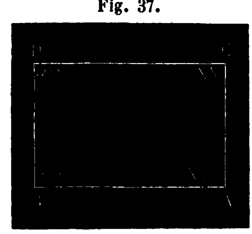
$$\int_{x_0}^{X} \left[\mathrm{D}_x F(x, Y) - \mathrm{D}_x F(x, y_0) \right] dx,$$

soit

$$\int_{y_0}^{Y} \left[\mathrm{D}_y F(X, y) - \mathrm{D}_y F(x_0, y) \right] dy,$$

suivant que l'on commencera à intégrer par rapport à y ou par rapport à x; ou, ce qui revient au même, suivant que l'on intégrera le long du contour du rectangle BACD, en passant soit par le chemin BDC, soit par le chemin BAC. Ces deux chemins conduisent au même résultat, si les fonctions $\mathrm{D}_x F(x, y)$, $\mathrm{D}_y F(x, y)$ sont uniformes et continues dans tout l'intérieur du rectangle. Dans le cas contraire, ils conduisent à des résultats dont la différence ne sera pas nulle, et cette différence ne sera autre chose que l'intégrale de la fonction

Fig. 37.



$$\mathrm{D}_x F(x, y)\, dx + \mathrm{D}_y F(x, y)\, dy,$$

prise le long du contour total du rectangle BACD. On a alors la formule (6), en supposant

$$U = \mathrm{D}_x F(x, y) \quad , \quad V = \mathrm{D}_y F(x, y).$$

C'est pour cette raison que Cauchy a désigné l'emploi de la formule (5) sous le nom de *Méthode fondée sur la différence des valeurs que prend une intégrale double, quand on intervertit l'ordre des intégrations.*

236. La formule (6) se simplifie dans le cas où les intégrales prises le long de trois des côtés du rectangle s'annulent lorsque ces côtés s'en vont à l'infini, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\int_{x_0}^{X} U_{x,Y}\, dx = 0, \qquad \int_{y_0}^{Y} V_{x_0,y}\, dy = 0, \qquad \int_{y_0}^{Y} V_{X,y}\, dy = 0,$$

pour

$$x_0 = -\infty \quad , \quad X = +\infty \quad , \quad Y = +\infty \, .$$

Or $\int_{x_0}^{X} U_{x,Y}\,dx = (X - x_0) \times$ une moyenne de $U_{x,Y}$. Pour que cette quantité s'annule lorsque $X - x_0$ devient infini, il faut que $U_{x,Y}$ prenne pour $Y = \infty$, une valeur infiniment petite d'un ordre supérieur à l'unité. Il en sera de même pour les autres intégrales. Donc on pourra énoncer les conditions précédentes en disant que les fonctions

$$U_{x,\infty}, \qquad V_{\pm\infty,y}$$

doivent être, quels que soient x ou y, infiniment petites d'ordre supérieur à l'unité (1).

---

(1) Cauchy pose simplement pour conditions que les fonctions $U_{x,+\infty}$, $V_{\pm\infty,y}$ s'annulent. Il nous semble que ces conditions sont insuffisantes. En effet, elles sont remplies par la fonction

$$\frac{x+iy}{1+(x+iy)^2},$$

qui est infiniment petite du 1er ordre pour toute valeur infinie de l'une des variables x, y. Or, l'intégrale de cette fonction prise par rapport à x, en supposant

$$x_0 = -\omega, \qquad X = a\omega, \qquad Y = b\omega,$$

a pour valeur

$$\int_{-\omega}^{a\omega} \frac{(x+ib\omega)\,dx}{1+(x+iy)^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+(a+ib)\omega}{1+(-1+ib)\omega}$$

quantité dont la limite, pour $\omega = \infty$, est

$$\frac{1}{2}\log\frac{a+ib}{-1+ib},$$

et cette valeur n'est pas nulle, mais indéterminée.

Au contraire, si l'on traite de même la fonction

$$\frac{1}{1+(x+iy)^2},$$

qui est infiniment petite du second ordre, on trouve pour résultat

$$\text{arc tang}\,\frac{(1+a)\omega}{1+(a+ib)(-1+ib)\omega^2},$$

qui a pour limite arc tang (0) ou zéro.

Si ces conditions sont satisfaites, la formule (6) deviendra

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} U_{x,y_0}\, dx = \Delta.$$

De même, si les valeurs

$$f(x+i.\infty)\quad,\qquad f(\pm\infty+iy)$$

sont, pour toute valeur de x ou de y, infiniment petites d'ordre supérieur au premier, on aura, au lieu de (7), la formule plus simple

$$(9)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_0)\, dx = \Delta,$$

qui n'est autre chose que ce que devient la formule (5) du n° 231 pour $y_0 = 0$. Il est aisé de voir, en effet, que les conditions précédentes se réduisent à celle du n° 231.

237. On peut mettre la formule (6) sous une forme plus commode, qui exprime que $Udx + Vdy$ est bien une différentielle exacte. Pour cela, w étant une fonction donnée de x et de y, et $F(w)$ une fonction quelconque de w, il suffira de poser

$$U = F(w).\mathrm{D}_x w\quad,\quad V = F(w).\mathrm{D}_y w.$$

La formule (6) deviendra alors

$$\int_{x_0}^{X}\left[F(w_{x,y_0})\,\mathrm{D}_x w_{x,y_0} - F(w_{x,Y})\,\mathrm{D}_x w_{x,Y}\right]dx$$
$$+\int_{y_0}^{Y}\left[F(w_{X,y})\,\mathrm{D}_y w_{X,y} - F(w_{x_0,y})\,\mathrm{D}_y w_{x_0,y}\right]dy = \Delta.$$

Pour donner une application de cette formule, supposons

$$w = (a+iy)\,x;$$

a étant > 0, et faisons

$$x_0 = y_0 = 0\quad,\quad X = +\infty\quad,\quad Y = b.$$

Si l'on admet que $F(w)$ soit infiniment petit d'ordre supérieur au premier pour $x = \infty$, l'équation se réduira à

$$a\int_0^{\infty} F(ax)\,dx - (a+ib)\int_0^{\infty} F\left[(a+ib)x\right]dx = \Delta.$$

Soit, par exemple,

$$F(w) = w^{n-1} e^{-w},$$

n étant réel et positif. On a alors $\Delta = 0$, et $F(w)$ est infiniment petit d'ordre > 1 pour $x = +\infty$. La formule précédente devient donc

$$\int_0^\infty e^{-(a+ib)x} x^{n-1}\, dx = \frac{a^n}{(a+ib)^n} \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\, dx$$
$$= \frac{1}{(a+ib)^n}\Gamma(n).$$

Donc la formule

$$\int_0^\infty e^{-cx} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{c^n}$$

subsiste pour les valeurs complexes de c dont la partie réelle est positive.

En faisant

$$a + ib = \rho e^{i\theta},$$

la formule que nous venons d'obtenir se décompose dans les deux suivantes,

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos bx\, dx = \frac{\cos n\theta}{\rho^n}\Gamma(n),$$
$$\int e^{-ax} x^{n-1} \sin bx\, dx = \frac{\sin n\theta}{\rho^n}\Gamma(n),$$

qui, pour $n = 1$, se réduisent à

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$
$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

238. Soit $F(z) = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$ une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur de deux unités au moins à celui du dénominateur. Supposons que l'équation $\chi(z) = 0$ n'ait pas de racines réelles ou multiples, et soient $c_1, c_2, \ldots$ les racines complexes qui ont leur partie imaginaire positive. En appliquant à cette fonction la formule (5), il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\chi(x)}\, dx = 2\pi i \,\Sigma \frac{\varphi(c)}{\chi'(c)} = 2\pi i \Sigma C,$$

le signe Σ s'étendant à tous les infinis c situés au-dessus de l'axe des x, et C_1, C_2, ... étant les numérateurs de celles des fractions simples dans lesquelles se décompose la fonction donnée, qui correspondent à ces infinis.

Si $\chi(z) = 0$ n'a aucune racine au-dessous de l'axe des x, il est facile de voir que ΣC doit être nul, si le degré de $\varphi(z)$ est inférieur de 2 unités à celui de $\chi(z)$. On a dans ce cas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\chi(x)}\, dx = 0.$$

Soit, par exemple, la fonction $\frac{\varphi(z)}{1+z^2}$, le degré de $\varphi(z)$ étant moindre que l'unité. On a le seul infini $z = i$, et l'on trouve

$$\Delta = 2\pi i \,\mathcal{E}_i \frac{\varphi(z)}{1+z^2} = \pi\varphi(i),$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{1+x^2}\, dx = \pi\varphi(i).$$

En particulier, si l'on prend

$$\varphi(z) = (-ix)^{\mu-1}, \qquad 0 < \mu < 1,$$

on a

$$\int_{-}^{\infty} \frac{(-ix)^{\mu-1}\, dx}{1+x^2} = \left[(-i)^{\mu-1} + i^{\mu-1}\right]\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\, dy}{1+x^2} = \pi,$$

ou, à cause de $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\mu\pi}{2}}.$$

Cette formule se ramène facilement à celle que nous avons trouvée par une autre voie au n° 232.

239. Prenons pour contour le périmètre d'un triangle rectangle

ABC, dont les sommets aient pour coordonnées respectives (x_0, y_0), (X, y_0), (X, Y). On aura

$$\int(\mathrm{AB}) + \int(\mathrm{BC}) - \int(\mathrm{AC}) = \Delta.$$

En prenant, pour plus de simplicité $x_0 = y_0 = 0$, on aura, en chaque point de AC,

$$y = ax,$$

d'où

$$dy = a\,dx, \qquad Y = aX,$$

et l'on a, au lieu de la formule du n° 238,

$$\int_0^X F(w_{x,0})\,\mathrm{D}_x w_{x,0}\,dx + \int_0^{aX} F(w_{X,y})\,\mathrm{D}_y w_{X,y}\,dy - \int_0^X F(w_{x,ax})\,dw_{x,ax} = \Delta.$$

Si l'on fait $w = x + iy$, cette formule devient

$$\int_0^X F(x)\,dx + ia\int_0^X F(X + iay)\,dy - \int_0^X F[(1+ia)x](1+ia)\,dx = \Delta.$$

Soit, par exemple, la fonction $f(z) = e^{-z^2}$, qui est finie pour toute valeur de x, si l'on prend

$$z = (1 + ia)x, \qquad a^2 < 1.$$

Donc $\Delta = 0$, et l'on a

$$\int_0^X \left[e^{-x^2} + iae^{-(X+iax)^2}\right] dx - (1 + ia)\int_0^X e^{-(1+ia)^2x^2}\,dx = 0.$$

Si l'on fait maintenant $X = \infty$, comme on a, pour $x = tX$,

$$\int_0^X e^{-(X+iax)^2}\,dx = Xe^{-X^2}\int_0^1 e^{-(1+iat)^2}\,dt,$$

et que la seconde intégrale a toujours une valeur finie, la première est nulle pour $X = \infty$. Il reste donc, à cause de

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$(1 + ia)\int_0^\infty e^{-(1+ia)^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

d'où, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$\int_0^\infty e^{-(1-a^2)x^2}\cos(2ax^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+a^2)},$$

$$\int_0^\infty e^{-(1-a^2)x^2}\sin(2ax^2)\,dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{2(1+a^2)}.$$

240. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle de z. D'après ce que nous avons vu (nos 213 et suiv.), la différence

$$\varphi(z) - \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta}$$

est une fonction continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Si l'on désigne par $f(z)$ une autre fonction uniforme et continue dans l'aire $\mathfrak{A}$, le produit de cette fonction par la différence précédente sera aussi une fonction uniforme et continue, et l'on aura par conséquent

$$\int_{\mathfrak{A}} \left[\varphi(z) - \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\right] f(z)\,dz = 0,$$

ou

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(z) f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{A}} \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta} f(z)\,dz,$$

ou, en mettant pour le résidu sa valeur

$$\Sigma_k \left[\frac{C'_k}{z-c_k} + \frac{C''_k}{(z-c_k)^2} + \cdots + \frac{C_k^{(n)}}{(z-c_k)^n}\right],$$

que nous désignerons simplement par

$$\Sigma \frac{C^{(h)}}{(z-c)^h},$$

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(z) f(z)\,dz = \Sigma C^{(h)} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)\,dz}{(z-c)^h}$$

$$= 2\pi i\, \Sigma C^{(h)} \frac{f^{(h-1)}(c)}{(h-1)!},$$

le signe de sommation s'étendant aux divers infinis de $\varphi(z)$, ainsi qu'aux divers termes dont se compose le résidu relatif à chaque infini. Le second membre n'est autre que la valeur de Δ.

Si l'on suppose, par exemple,

$$f(z) = e^{i\mu z}, \text{ pour } \mu > 0,$$

cette fonction sera uniforme et continue dans toute la moitié supérieure du plan. Soit $c = a + ib$ un infini de $\varphi(z)$, b étant positif. On a

$$f(c) = e^{-\mu b}.e^{i\mu a},$$
$$f^{(n-1)}(c) = (i\mu)^{n-1}.e^{-\mu b}.e^{i\mu a}.$$

On verrait, comme au n° 233, que l'intégrale s'évanouit pour un module de z infini. On aura donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x}\varphi(x)\,dx = 2\pi i\,\Sigma\, C^{(h)}\,\frac{(i\mu)^{h-1}}{(h-1)!}\,e^{-\mu b}\,e^{i\mu a}.$$

formule vraie pour toute fonction rationnelle $\varphi(x)$ qui ne devient infinie pour aucune valeur réelle de x.

241. Soit w une fonction de z, et $\varphi(w)$ une fonction de w qui devient infinie pour les valeurs

$$w = \gamma_1, \quad \gamma_2, \ldots, \gamma_m,$$

correspondantes à des valeurs de z contenues dans l'aire $\mathfrak{A}$, et soient

$$\mu_1, \quad \mu_2, \ldots, \mu_m$$

les ordres respectifs de ces infinis.

Soit, de plus, $f(z)$ une fonction de z qui ait pour infinis dans l'aire $\mathfrak{A}$ les points

$$z = c_1, \quad c_2, \ldots, \quad c_n,$$

ayant pour ordres respectifs

$$\nu_1, \quad \nu_2, \ldots, \nu_n.$$

Posons, comme précédemment,

$$\mathcal{E}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta} = \Sigma_k\left[\frac{C_k'}{z-c_k} + \frac{C_k''}{(z-c_k)^2} + \cdots + \frac{C_k^{(\nu_k)}}{(z-c_k)^{\nu_k}}\right]$$
$$= \Sigma\frac{C^{(h)}}{(z-c)^h},$$

et de même, en considérant w comme la variable indépendante et ζ comme prenant les valeurs $\zeta = \gamma_1, \gamma_2, \ldots$,

$$\mathcal{L}\frac{\varphi(\zeta)}{w-\zeta} = \Sigma \frac{\Gamma^{(h)}}{(w-\gamma)^h}.$$

Nous aurons alors

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(w)\,\mathrm{f}(z)\,dz = \Sigma \int_\gamma \frac{\Gamma^{(h)}\mathrm{f}(z)\,dz}{(w-\gamma)^h} + \Sigma \int_c \frac{C^{(h)}\varphi(w)\,dz}{(z-c)^h}.$$

Si nous posons maintenant

$$\mathrm{f}(z)\,dz = \chi(w)\,dw \quad , \quad \text{ou} \quad \chi(w) = \mathrm{f}(z)\frac{dz}{dw},$$

la première somme deviendra

$$\Sigma \int_\gamma \frac{\Gamma^{(h)}\chi(w)\,dw}{(w-\gamma)^h} = 2\pi i\; \Sigma \frac{\Gamma^{(h)}\chi^{(h-1)}(\gamma)}{(h-1)!}.$$

Si nous faisons ensuite

$$\varphi(w) = \psi(z),$$

la seconde somme deviendra

$$\Sigma \int_c \frac{C^{(h)}\psi(z)\,dz}{(z-c)^h} = 2\,\pi i\; \Sigma \frac{C^{(h)}\psi^{(h-1)}(c)}{(h-1)!}.$$

Donc

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(w)\,\mathrm{f}(z)\,dz = 2\,\pi i \left[\Sigma \frac{\Gamma^{(h)}\chi^{(h-1)}(\gamma)}{(h-1)!} + \Sigma \frac{C^{(h)}\psi^{(h-1)}(c)}{(h-1)!} \right].$$

Exemples. Soit $\mathrm{f}(z) = \frac{1}{1+z^2}$. En prenant toujours pour $\mathfrak{A}$ la moitié supérieure du plan, on a

$$c = i, \qquad C = \lim \frac{\varepsilon}{1+(i+\varepsilon)^2} = \frac{1}{2i}.$$

La seconde somme devient donc

$$2\pi\psi(i) = \pi\varphi[w(i)].$$

Si l'on fait, de plus,

$$w = \frac{1+iz}{1-iz},$$

on a d'abord

$$w(i) = 0 \ , \quad \text{d'où} \quad \pi\psi(i) = \pi\varphi(0).$$

Ensuite

$$f(z)\,dz = \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\frac{dw}{w},$$

d'où

$$\chi(w) = \frac{1}{2iw}.$$

Donc

$$2\pi i\,\Sigma\,\frac{\Gamma^{(h)}\chi^{(h-1)}(\gamma)}{(h-1)!} = \pi\,\Sigma(-1)^h\,\frac{\Gamma^{(h)}}{\gamma^h}.$$

Par conséquent, si l'on se trouve dans les conditions du n° 231, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \pi\left[\varphi(0) + \Sigma(-1)^{h-1}\,\frac{\Gamma^{(h)}}{\gamma^h}\right].$$

De même, pour

$$f(z) = \frac{r}{r^2+z^2}, \qquad w = \log(-iz),$$

d'où

$$\chi(w) = \frac{1}{i}\frac{re^w}{r^2+e^{2w}},$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left[\log(-ix)\right]\frac{rdx}{r^2+x^2}$$

$$= \int_0^{\infty}\left[\varphi\left(\log x - \frac{\pi i}{2}\right) + \varphi\left(\log x + \frac{\pi i}{2}\right)\right]\frac{rdx}{r^2+x^2}$$

$$= \pi.\varphi(\log r) + 2\pi r\,\Sigma\,\frac{\Gamma^{(h)}}{(h-1)!}\,.\,D_\gamma^{h-1}\frac{e^\gamma}{r^2+e^{2\gamma}}.$$




JUL 30 1881
MAY 17 1887
OCT 31 1887
FEB 14
FEB 14 1901